TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS SANS POINTS CONJUGUÉS

Lemme (M,g) connexe, (N,h) connexe et complète (et $\neq \emptyset$)

$\pi \; N \to M$ isometrie locale

(i.e difféo. local, $\pi^* h = g$)

Alors $\pi : N \to M$ est un rêvetement et M est complète

Preuve

- $x \in M$ arbitraire

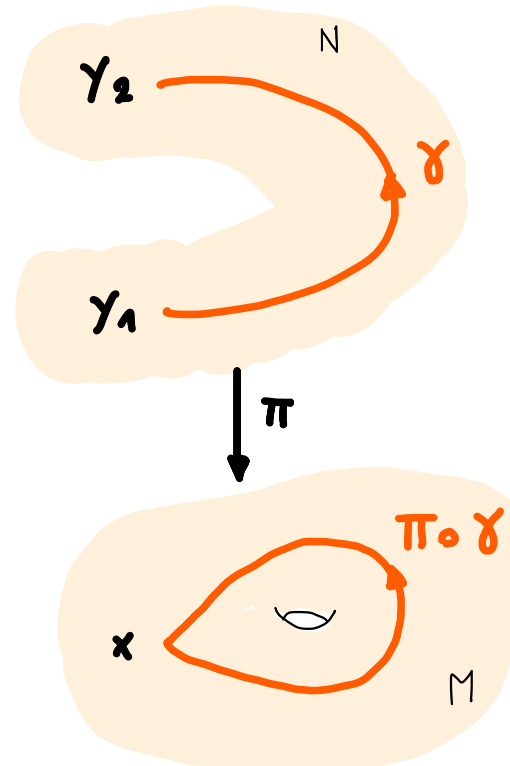
  Montrons que $\forall y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$, $y_1 \neq y_2$ on a

$$d_h(y_1, y_2) \geq 2 \, \mathrm{inj}(x)$$

Soit $\gamma : [0,1] \to N$ une géodesique tq

$$\gamma(0) = y_1$$
$$\gamma(1) = y_2$$
$$L_h(\gamma) = d_h(y_1, y_2)$$

(γ existe par le thm de Hopf-Rinow)



Alors, comme π est une isometrie locale, $\pi \circ \gamma$ est une geodesique de M tq. $\pi \circ \gamma(0) = \pi \circ \gamma(1)$

$$\Rightarrow d_h(y_1, y_2) = L_h(\gamma) = L_g(\pi \circ \gamma) \geq 2 \operatorname{inj}(x)$$

- $r \in (0, \operatorname{inj}(x))$

  $\forall y \in \pi^{-1}(x) \qquad U_y = B(y, r) = \{ z \in N \mid d_h(z, y) < r \}$

- $U_{y_1} \cap U_{y_2} = \emptyset \quad \forall\, y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ tq $\quad y_1 \neq y_2$

$$\left(\begin{array}{l} \text{car si } z \in U_{y_1} \cap U_{y_2}, \text{ alors} \\ \\ d_h(y_1, y_2) \leq d_h(y_1, z) + d_h(z, y_2) < r + r < 2\, \operatorname{inj}(x) \end{array} \right)$$

• M est complète

(N,h) est complète, donc $\forall\, y \in N \quad \exp_y : T_yN \to N$ est bien défini

$\Rightarrow \quad x := \Pi(y) \qquad d\Pi(y) : T_yN \xrightarrow{\cong} T_xM$ isomorphisme linéaire

$$\exp_x(v) = \Pi \circ \exp_y\left(d\Pi(y)^{-1} v \right) \qquad \forall\, v \in T_xM$$

(car Π envoie géodésiques de N vers géodésiques de M)

$\Rightarrow \quad \exp_x : T_xM \longrightarrow M$ bien défini $\xRightarrow{\text{Hopf-Rinow}}$ (M,g) complète

- $\pi : N \longrightarrow M$ **est surjective**

$y \in N$, $\quad x = \pi(x)$

comme M est complète, $\quad \forall z \in M \quad \exists v \in T_x M$

t.q. $\quad z = \exp_x(v)$

$$w := d\pi(y)^{-1} v$$

$$\pi \circ \exp_y(w) = \exp_x\big(d\pi(x)w\big) = \exp_x(v) = z$$

$$\Longrightarrow \quad z \in \operatorname{Im}(\pi)$$

- $\forall x \in M \qquad \pi^{-1}(B(x,r)) = \coprod_{y \in \underbrace{\pi^{-1}(x)}_{\neq \emptyset}} U_y$

- $\pi|_{U_y} : U_y \xrightarrow{\cong} B(x,r)$ est un difféomorphisme

car il est un difféomorphisme locale ;

il est surjectif. $\forall z \in B(x,r) \quad \exists !\, v \in T_x M \quad$ t.q $\begin{cases} \|v\|_g < r \\ \exp_x(v) = z \end{cases}$

$$\Rightarrow \pi\left(\exp_y\left(d\pi(y)^{-1} v\right)\right) = z$$

il est injectif. Si $z_1, z_2 \in U_y$ t.q. $\pi(z_1) = \pi(z_2)$

$\exists !\, w_i \in T_y N$ t.q. $\|w_i\|_h < r$, $\exp_y(w_i) = z_i$

$$\Rightarrow \quad z = \exp_x\left(d\pi(y) w_1\right) = \exp_x\left(d\pi(y) w_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad d\pi(y) w_1 = d\pi(y) w_2$$

$$\Rightarrow \quad w_1 = w_2 \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2$$

$\square$

Thm (Cartan-Hadamard)

Soit (M^n, g) une variété riemannienne connexe, complete, et $\underbrace{\text{sans points conjugués}}_{(\text{e.g. } K_g \leq 0)}$

Alors $\exp_x \, T_x M \to M$ est le rêvetement universel $\forall x \in M$

(En particulier, si M est simplement connexe alors elle est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$)

Preuve

- Comme M est sans points conjugués, $\exp_x : T_xM \to M$ est un difféomorphisme local

- $h = \exp_x^* g$

  $\exp_x$ est une isométrie locale de (T_xM, h) vers (M, g)

- On conclut par le lemme précédent $\square$

TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS À COURBURE POSITIVE

Thm (Bonnet) (M sans bord)

Soit (M,g) connexe, complète, avec courbure sectionnelle $K_g \geq \frac{1}{R^2} > 0$

Alors M est compacte,

$\boxed{\mathrm{diam}(M) \leq \pi R}$

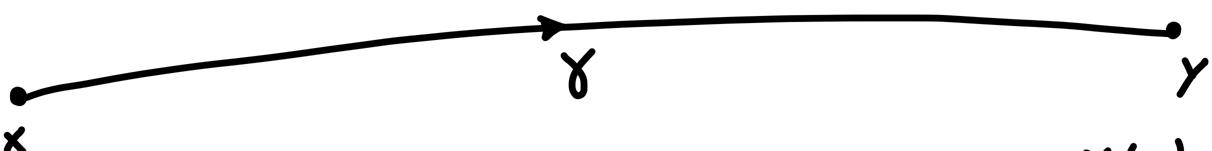
$\pi_1(M)$ fini

diamètre de (M,g) $\qquad \mathrm{diam}(M,g) = \sup_{x,y \in M} d_g(x,y)$

Preuve

• Supposons par l'absurde

$$\exists\, x,y \in M \quad \text{tq} \quad \underbrace{d_g(x,y)}_{=\,L} > \pi R$$



$\gamma \;\; [0,L] \to M$ géodesique tq $\gamma(0) = x,\ \gamma(L) = y$, $\|\gamma\|_g \equiv 1$ $\qquad$ (γ existe par Hopf-Rinow)

- E champ de vecteurs le long de γ t.q.

$$\|E(0)\|_g = 1, \quad g\big(E(0), \gamma(0)\big) = 0, \quad \nabla_t E \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad \|E\|_g \equiv 1, \quad g(E, \gamma) \equiv 0$$

$$\left(\text{car} \quad \frac{d}{dt} \|E\|_g^2 = 2\, g\big(\underbrace{\nabla_t E}_{0}, E\big) = 0 \right.$$

$$\left. \frac{d}{dt}\, g(E, \dot\gamma) = g\big(\underbrace{\nabla_t E}_{0}, \dot\gamma\big) + g\big(E, \underbrace{\nabla_t \dot\gamma}_{0}\big) = 0 \right)$$

- $V(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) E(t) \quad \Rightarrow \quad V(0) = 0$

$$V(L) = 0$$

- $\nabla_t V = \frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi}{L}t\right)E(t) + \sin\left(\frac{\pi}{L}t\right)\underbrace{\nabla_t E}_{0} = \frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi}{L}t\right)E(t)$

$$\nabla_t^2 V = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{L}t\right)E(t)$$

- forme d'indice.

$$I_0^L(V,V) = -\int_0^L g\left(\nabla_t^2 V + R(V,\gamma)\dot\gamma, V\right) dt$$

$$= -\int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}t\right)^2 \left(-\frac{\pi^2}{L^2} + \underbrace{K_g\left(\mathrm{span}\{\dot\gamma, E\}\right)}_{\geqslant \frac{1}{R^2}}\right) dt$$

$$< 0$$

$\Rightarrow$ γ n'est pas minimisante $\lightning$

Donc $\operatorname{diam}(M,g) < \pi R$

- $M = \exp_x\Big(\underbrace{\overline{B_x(\pi R)}}_{= \{v \in T_xM \mid \|v\|_g \leq \pi R\}}\Big)$ compacte

- $p \ \tilde{M} \to M$ rêvetement universel

  $\tilde{g} = p^* g$

  $\Rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ satisfait les hypothèsese du thm

$\Rightarrow \tilde{M}$ compact

$\pi_1(M) \cong p^{-1}(x)$ est fini $\square$

Rmq Si $K_g \geq \frac{1}{R^2}$, alors

$$Ric(V,V) = \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i,V)V, E_i) = \sum_{i=2}^{n} \|V\|_g^2 \, K_g(\mathrm{span}\{E_1, E_i\})$$

$E_1, \dots, E_n$ base orthonormée de T_xM t.q. $\|V\|_g \cdot E_1 = V$

$$\geq \frac{n-1}{R^2} \|V\|_g^2$$

Voici une version plus forte du thm de Bonnet.

Thm (Myers)

Soit (M,g) connexe, complète, avec courbure de Ricci $\mathrm{Ric}(V,V) \geq \frac{n-1}{R^2} \|V\|_g^2$

Alors M est compacte,

$\operatorname{diam}(M) \leq \pi R$

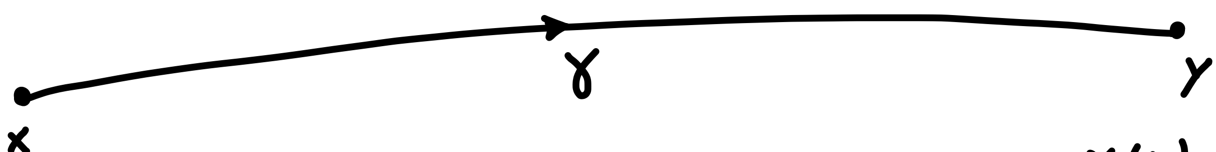
$\pi_1(M)$ fini

Preuve

- Comme dans la preuve du thm de Bonnet.

Supposons par l'absurde

$$\exists\, x,y \in M \quad \text{tq} \quad \underbrace{d_g(x,y)}_{=L} > \pi R$$



$\gamma\ [0,L] \to M$ géodesique tq $\gamma(0)=x,\ \gamma(L)=y$, $\|\gamma\|_g \equiv 1$

- $E_1, \ldots, E_m$ champs de vecteurs le long de γ tq.

$$\begin{cases} \underset{\underset{\dot\gamma(0)}{\shortparallel}}{E_1(0)}, E_2(0), \ldots, E_m(0) \quad \text{base orthonormale de } T_{\gamma(0)}M \\ \nabla_t E_i \equiv 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \| E_i(t) \|_g^2 \equiv 0 \\ &\frac{d}{dt}\, g\big(E_i(t), E_j(t)\big) \equiv 0 \end{aligned} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\underset{\dot\gamma(t)}{\shortparallel}}{E_1(t)}, \ldots, E_m(t) \quad \text{base orthonormale de } T_{\gamma(t)}M \quad \forall t$$

- $V_i(t) := \sin\left(\frac{\pi}{L} t\right) E_i(t) \qquad i = 1, \ldots, m$

- $$\sum_{i=2}^{m} I_0^L(V_1, V_i)$$

$$= -\sum_{i=2}^{m} \int_0^L g\left(\nabla_t^2 V_1 + R(V_1,\gamma)\gamma, V_i\right) dt$$

$$= -\int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}t\right)^2 \left(-(m-1)\frac{\pi^2}{L^2} + \underbrace{Ric(\gamma,\gamma)}_{\geq \frac{m-1}{R^2}}\right) dt$$

$$< 0$$

$$\Rightarrow \quad I_0^L(V_i, V_i) < 0$$ pour un certain i

$\Rightarrow$ γ n'est pas minimisante $\lightning$

$\square$

Thm (Weinstein)

(fermée = compacte sans bord)

(M, g) fermée et orientable, $K_g > 0$

$\psi : M \circlearrowleft^{\cong}$ isométrie (i.e. $\psi^* g = g$)

Supposons que

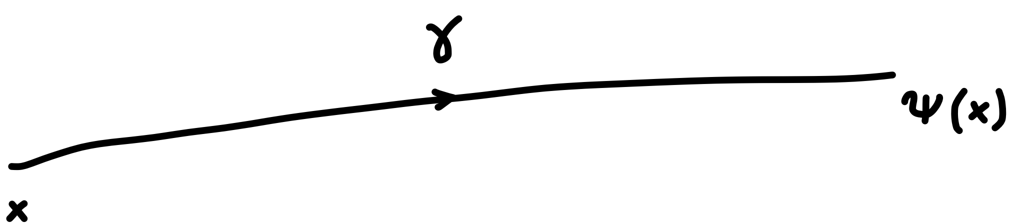
- ψ préserve l'orientation si $\dim(M)$ pair
- ψ renverse l'orientation si $\dim(M)$ impair

Alors $\exists\, x \in M$ tq $\psi(x) = x$

Preuve

- $x \in M$ tq $d_g(x, \psi(x)) = \min\limits_{y \in M} d_g(y, \psi(y))$

  Supposons par l'absurde que $d_g(x, \psi(x)) > 0$

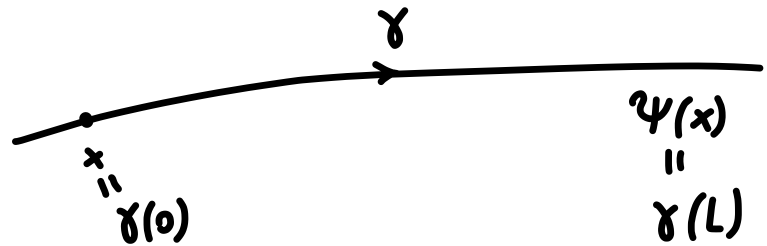
- 

  $\gamma\ [0, L] \to M$ géod tq. $\gamma(0) = x,\ \gamma(L) = \psi(x),\ \|\gamma(0)\|_g \equiv 1$

  $L = d_g(x, \psi(x))$

- $d\Psi(x)\,\gamma(0) = \gamma(L)$

En fait.



par notre choix de x

$$
\begin{aligned}
d(x,\Psi(x)) &\leq d(\gamma(t),\Psi(\gamma(t))) \\
&\leq d(\gamma(t),\Psi(x)) + d(\Psi(x),\Psi(\gamma(t))) \\
&= d(\gamma(t),\Psi(x)) + d(x,\gamma(t)) \\
&= d(x,\Psi(x))
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ pour $t \in (0, L)$ la courbe

$$\tilde{\gamma}(s) = \begin{cases} \gamma(s), & s \in [t, L] \\ \psi(\gamma(s-L)), & s \in [L, L+t] \end{cases}$$

Longueur $L_g(\tilde{\gamma}) = d(\gamma(t), \psi(\gamma(t)))$

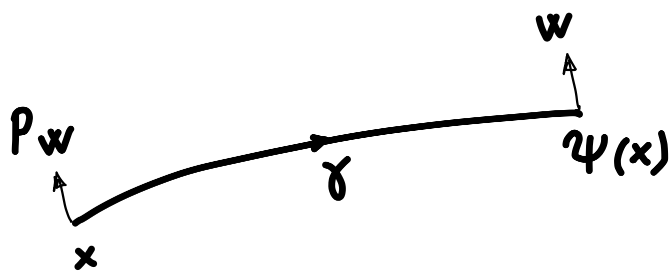
$\Rightarrow$ $\tilde{\gamma}$ est une géodésique

$\Rightarrow$ $\tilde{\gamma}$ est C^∞

$\Rightarrow$ $\dot{\gamma}(L) = d\psi(\gamma(0))\dot{\gamma}(0)$

- $\exists$ V champ de vecteurs le long de γ
tq $g(V, \dot\gamma) \equiv 0$, $\|V\|_g \equiv 1$, $\nabla_{\dot\gamma} V \equiv 0$
$$d\psi(\gamma(0))V(0) = V(L)$$

$P \quad T_{\psi(x)}M \xrightarrow{\cong} T_x M$ transport parallèle le long de γ



Rmq P est une isometrie linéaire

$$\left(g(Pw_1, Pw_2) = g(w_1, w_2) \quad \forall w_1, w_2 \in T_{\psi(x)}M \right)$$

$A := P \circ d\Psi(x) \quad T_xM \circlearrowleft \cong$ isometrie linéaire

A preserve l'orientation si $\dim M$ pair

A renverse l'orientation si $\dim M$ impair

$\Rightarrow \det(A) = (-1)^n$, où $n = \dim M$

$A\dot{\gamma}(0) = P \circ d\Psi(x)\dot{\gamma}(0) = P\dot{\gamma}(L) = \dot{\gamma}(0)$

$T_xM = \mathrm{span}\{\gamma(0)\} \oplus \underset{\mathrm{span}\{\dot{\gamma}(0)\}^\perp}{\overset{\shortparallel}{E}}$ $\qquad AE = E$

$\dim E = n-1$ (où $n = \dim M$)

$\det A|_E = (-1)^n$, $m_\lambda = \dim \operatorname{Ker}(A|_E - I)$

$\lambda \in \{1, -1\}$

$$\Rightarrow (-1)^{m_{-1}} = \det(A|_E) = (-1)^n$$

$$\Rightarrow m_{-1} = n \mod 2 \Rightarrow m_1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists\, w \in E \quad \text{tq} \quad \|w\|_g = 1, \quad Aw = w$$

On prend V tq

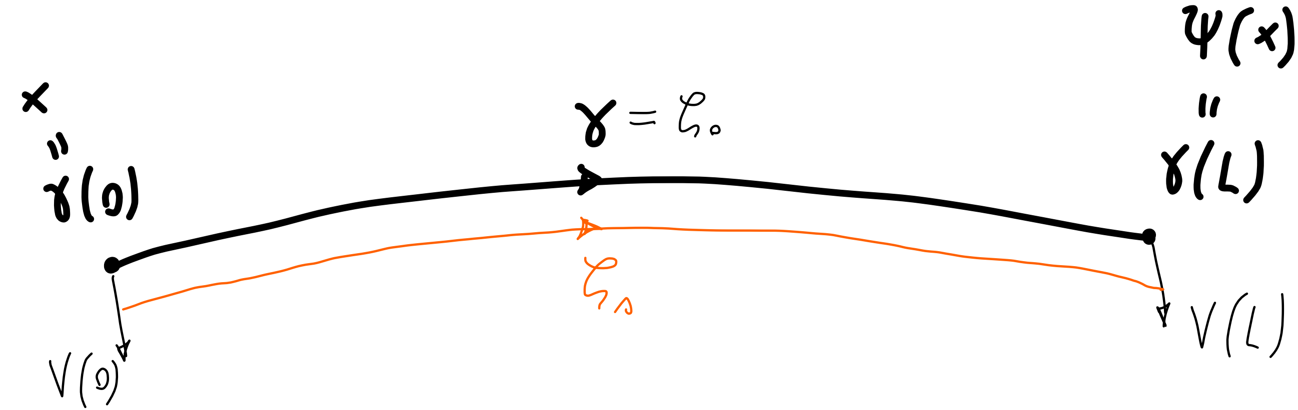
$$\nabla_t V \equiv 0, \quad V(0) = w$$

$$\Rightarrow \quad V(L) = P^{-1} V(0) = P^{-1} A(V(0)) = d\Psi(x)\, V(0)$$

- $$I(V,V) = \int_0^L \Big(\underbrace{\|\nabla_t V\|_g^2}_{0} - \underbrace{g\big(R(V,\gamma)\gamma, V\big)}_{K_g(\{\mathrm{span}\{V,\dot{\gamma}\}\}) > 0} \Big)\, dt < 0$$

⚠ $V(0) \neq 0$

$V(L) \neq L$



$$\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \qquad c_s : [0, L] \to M$$

$$c_s(t) = \exp_{\gamma(t)}\big(s V(t)\big)$$

$$\Longrightarrow \quad c_s(L) = \exp_{\psi(x)}\big(s \, d\psi(x) V(0)\big) = \psi\big(c_s(0)\big)$$

mais $\quad d\big(c_s(0), \psi(c_s(0))\big) \leq L_g(c_s) < L_g(\gamma) = d\big(x, \psi(x)\big)$ ↯

$\square$

Thm (M, g) variete riemannienne

$\gamma : [0, L] \to M$ géodésique sans points conjugués

Alors, sa forme d'indice I est definie positive, i.e

$$I(V, V) > 0 \quad \forall\, V \text{ champ de vecteurs orthog à } \gamma,\ V \not\equiv 0$$