GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Sujet du cours. Géométrie riemannienne

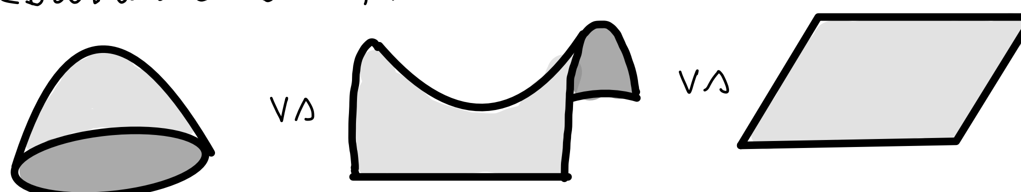
(M, g)

variété différentiable

métrique riemannienne

Elle permet de mesurer

- Longueurs de courbes $\gamma \subset M$
- Volume d'ouverts $U \subset M$
- Courbure de M



Avant d'aborder la géométrie riemannienne

FIBRÉS VECTORIELS

Vous avez déjà rencontré cette notion

TM = fibré tangent de M

T^*M = fibré cotangent de M

$\Lambda^p(T^*M)$ = fibré des p-formes alternées

FIBRÉ VECTORIEL de rang $r \geq 0$

$\pi : E \longrightarrow B$

avec les propriétés suivantes.

1) B variété de dim n, E variété de dim $n+r$

espace total

π C^∞, surjective

2) $\forall x \in B$ $\quad E_x := \pi^{-1}(x)$ est un espace vectoriel de dim $= r$

3) Toute $x \in B$ a un voisinage $U \subset B$ t q

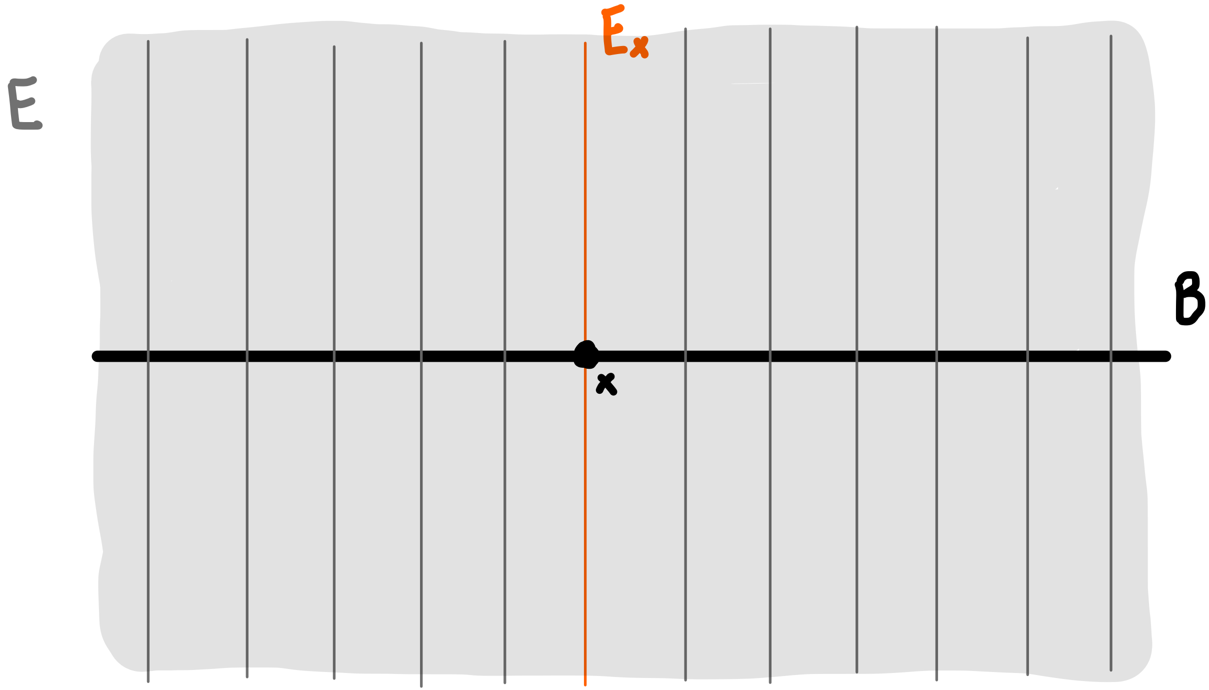
$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "pr"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

$pr(y,v) = y$

où χ difféomorphisme

et $\chi|_{\pi^{-1}(y)} : E_y \xrightarrow[\cong]{\text{lin}} \{y\} \times \mathbb{R}^r$

$\chi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ est dite **TRIVIALISATION LOCALE**



on identifie B avec la section nulle, ie

$B \equiv 0_B \subset E$

$x \equiv 0_x \in E_x$

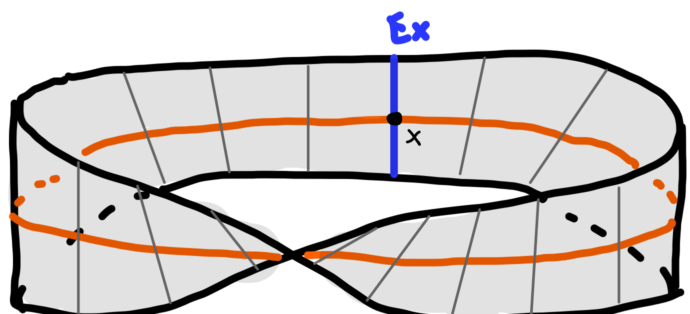
exemples

- fibré trivial $\quad E = B \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} B$

$$(x,y) \longmapsto x$$

- bande de Möbius $\quad E = \underset{\sim}{\underline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad (x,v) \sim (x+1,-v)$

$$[x,v] \longmapsto [x]$$



- Fibré tangent $TM \xrightarrow{\pi} M$ $\left(\text{rang}(TM) = \dim(M)\right)$

Si $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ $\underset{\underset{M}{\cap}}{U} \to \mathbb{R}^n$ est une carte de M,

on a la trivialisation locale associée

$$\chi \quad \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_{x_i}\Big|_x \longmapsto (x, v^1, \dots, v^n)$$

$v \in T_xM$

Morphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "F"] & B_2 \end{tikzcd}$$

le diagramme commute, et $\tilde{F} . \pi_1^{-1}(x) \to \pi_2^{-1}(F(x))$ est linéaire $\forall x \in B_1$

Le morphisme est un isomorphisme si les restrictions $\tilde{F}|_{\pi^{-1}(x)}$ sont isomorphismes linéaires et F est un difféo.

Un fibré vectoriel est trivial s'il est isomorphe à $B \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} B$, $\pi(x,v) = x$

$E \xrightarrow{\pi} B$ fibré vectoriel de rang r

$B = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $U_\alpha \subset B$ ouvert tq

$\exists$ trivialisation $\chi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$

changement de trivialisation

$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1} \; (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$

a la forme $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(x,v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$

où $g_{\alpha\beta} \; U_\alpha \cap U_\beta \to \underbrace{GL(r)}_{\text{GROUPE DE STRUCTURE du fibré}}$

FONCTION DE TRANSITION

Rmq Les fonctions de transition définissent le fibré à isomorphisme près

$$(*) \begin{cases} g_{\alpha\beta}(x)\, g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x) & \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \\ g_{\alpha\beta}(x)\, g_{\beta\alpha}(x) = id & \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \end{cases}$$

i.e toute famille d'applications $g_{\alpha\beta}$ satisfaisant $(*)$ définie un fibré vectoriel

$$E := \left(\coprod_{\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n \right) / \sim$$

$$\underset{U_\alpha \times \mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{(x, v)}} \sim \underset{U_\beta \times \mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{(x, g_{\beta\alpha}(x) v)}} \qquad \forall\, x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

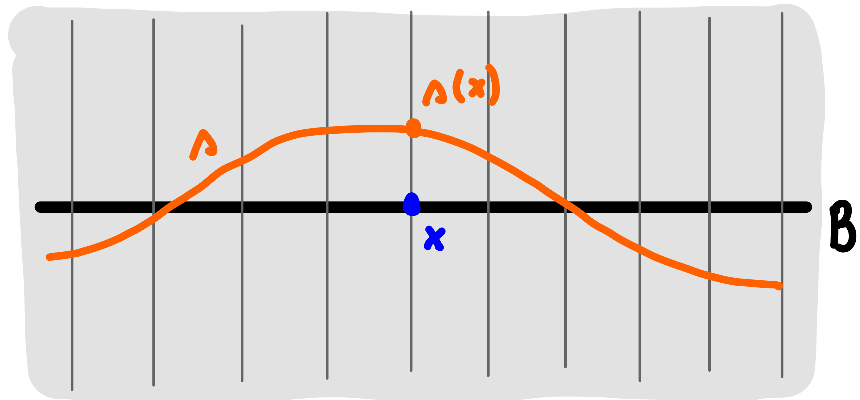
$$v \in \mathbb{R}^n$$

$$\pi : E \longrightarrow B$$

$$[x, v] \longmapsto x$$

SECTION de $E \xrightarrow{\pi} B$

$s : B \xrightarrow{C^\infty} E$ tq $\pi \circ s = \mathrm{id}$



$\Gamma(E) = \{\text{sections de } E \xrightarrow{\pi} B\}$ espace vectoriel

OPERATIONS SUR LES FIBRÉS VECTORIELS

$E \xrightarrow{\pi} B$ rang r $\qquad$ $E' \xrightarrow{\pi'} B$ rang r'

$g_{\alpha\beta}$ f d t. (fonction de transition) $\qquad$ $g'_{\alpha\beta}$ f d t

OPERATIONS LINÉAIRES

$g_{\alpha\beta} : \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to GL(r)$

- $E \oplus E' \longrightarrow B$ rang $r + r'$

f.d.t. $\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$

- $E \otimes E' \to B$ rang $r r'$

  f.d.t. $g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta} \cdot U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r r')$

- $E^* \to B$ rang r

  f.d.t. $g^*_{\alpha\beta}$, où $g^*_{\alpha\beta}(x) = \left(g_{\alpha\beta}(x)^T\right)^{-1}$

- $Hom(E, E') \simeq E^* \otimes E'$

- $\Lambda^p E$

  .

- $E \xrightarrow{\pi} B$ rang r, $\quad f : A \xrightarrow{C^\infty} B$

TIRÉ EN ARRIERE $\quad f^*E \to A$ rang r

où $f^*E = \{(x,e) \in A \times E \mid f(x) = \pi(e)\}$

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & E \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$pr_2(x,e) = e$

$pr_1(x,e) = x$

exercice

- $g : A \to B$, $f : B \to C$ $\Rightarrow$ $g^* f^* E \cong (f \circ g)^* E$

  $E \to C$ fibré vectoriel $\quad$ $\mathrm{id}^* E \cong E$

NOTATION. $E \xrightarrow{\pi} B$ fibré vectoriel

$S \subseteq B$

$E|_S := \pi^{-1}(S)$

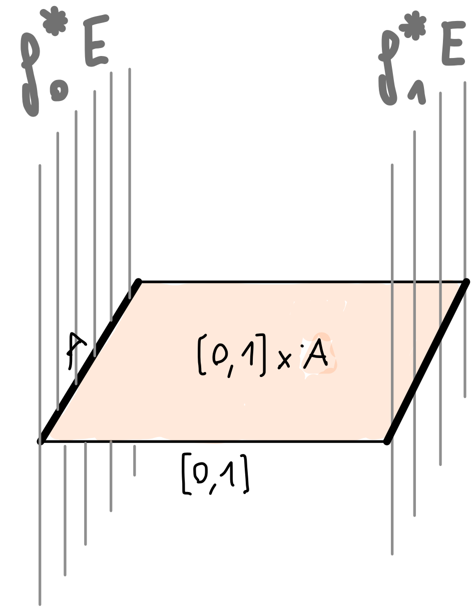
$$\boxed{E|_S \xrightarrow{\pi} S \text{ fibré vect}}$$

Proposition $\forall$ fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} B$,

homotopie lisse $f_t \colon A \to B$, $t \in [0,1]$,

on a un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$f_0^* E \underset{\text{isom de fibrés vect.}}{\cong} f_1^* E$$



Preuve

$f \colon [0,1] \times A \to B$, $f(t,x) = f_t(x)$

$f^* E \longrightarrow [0,1] \times A$

Il suffit de prouver.

$\forall$ fibré vect $E \to [0,1] \times B$

on a $E|_{0\times B} \cong E|_{1\times B}$

- **Step 1** $\forall E \to [0,1]\times B$, si $E|_{I_0 \times B}$ et $E|_{I_1\times B}$ sont triviaux, où $I_0 = [0,b)$, $I_1 = (a,1]$, $a<b$, alors E est triviale

trivialisations $\chi_i : E|_{I_i \times B} \to I_i \times B \times \mathbb{R}^n$

$i = 0,1$

Le changement de trivialisation a la forme

$$\chi_1 \circ \chi_0^{-1} : (a,b) \times B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (a,b) \times B \times \mathbb{R}^n$$

$$(t,x,v) \longmapsto (t, x, \underbrace{g(t,x)}_{\in GL(n)} v)$$

$c \in (a,b)$

$$s \; [0,b) \xrightarrow{C^\infty} [a,b) \qquad s(t) = \begin{cases} t, & t \geq c \\ a, & t \leq a \end{cases}$$

$$\tilde{g} : [0,b) \times B \longrightarrow GL(n), \quad \tilde{g}(t,x) = g(s(t), x)$$

On construit finalement une trivialisation

$$\tilde{\chi} : E \longrightarrow [0,1] \times B \times \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{\chi}(e) = \begin{cases} \chi_1(e), & \text{si } e \in E|_{(c,1]\times B} \\ \\ (t, x, \tilde{g}(t,x)v), & \text{si } e \in E|_{[0,b)\times B} \\ & (t,x,v) = \chi_0(e) \end{cases}$$

- **Step 2** $\forall$ fibré vect $E \to [0,1] \times B$
$\exists$ recouvrement ouvert $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ $\left(\begin{array}{c}\text{où} \\ U_\alpha \subset B \\ \text{ouvert}\end{array}\right)$
tq $E|_{[0,1]\times U_\alpha}$ triviale $\forall \alpha$

On fixe $x \in B$

Par compacité de $[0,1]$.

$\exists$ $I_1 \times W_1, \ldots, I_K \times W_K$ tq

$\bigcup_{i=1,\ldots,K} I_i \times W_i \ni [0,1] \times \{x\}$ $E|_{I_i \times W_i}$ triviale

$x \in U := \bigcap_{i=1,\ldots,K} W_i$ Step 1 $\Rightarrow$ $E|_{[0,1]\times U}$ triviale

- $\{U_\alpha\}$ recouvrement comme dans Step 2
(localement fini)

$\chi_\alpha \quad E|_{[0,1]\times U_\alpha} \longrightarrow [0,1]\times U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ trivialisation

$\rho_\alpha : B \to [0,1]$ partition de l'unité $\left(\begin{array}{l} \mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha \\ \sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1 \end{array} \right)$

$\alpha = 0, 1, 2, \ldots$

$\omega_\alpha : B \to [0,1]$, $\omega_\alpha = \rho_1 + \ldots + \rho_\alpha$, $\omega_0 \equiv 0$

$$\Gamma_\alpha = \{ (\omega_\alpha(x), x) \mid x \in B \}$$

$$\Gamma_0 = \{0\} \times B$$

Rmq
- $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha+1}$ en dehors de $[0,1]\times U_{\alpha+1}$, car $\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha + \rho_{\alpha+1}$
- $E|_{[0,1]\times U_{\alpha+1}}$ triviale

On construit un isomorphisme de fibrés

$$\begin{tikzcd} E|_{\Gamma_\alpha} \arrow[r, "H_\alpha", "\cong"'] \arrow[d, "\pi"'] & E|_{\Gamma_{\alpha+1}} \arrow[d, "\pi"] \\ \Gamma_\alpha \arrow[r, "h_\alpha"] & \Gamma_{\alpha+1} \end{tikzcd}$$

$(E \xrightarrow{\pi} [0,1]\times B)$

$$(\omega_\alpha(x), x) \longmapsto (\omega_{\alpha+1}(x), x)$$

$$H_\alpha(e) = \begin{cases} e, & \text{si } \pi(e) \notin [0,1]\times U_{\alpha+1} \\ \chi_{\alpha+1}^{-1}(\omega_{\alpha+1}(x), x, v) & \text{si } \pi(e) \in [0,1]\times U_{\alpha+1} \end{cases}$$

$\chi_{\alpha+1}(e) = (\omega_\alpha(x), x, v)$

$$H := \cdots \circ H_4 \circ H_3 \circ H_2 \circ H_1 \circ H_0$$

$H \cdot E|_{\{0\}\times B} \xrightarrow{\cong} E|_{\{1\}\times B}$ isomorphisme

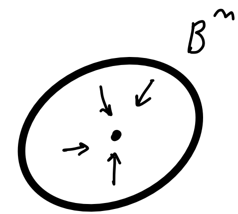
Tout $x \in B$ a un voisinage $U \subset B$

t.q.
$$H|_{E|_{\{0\}\times U}} = H_K \circ \cdots \circ H_0|_{E|_{\{0\}\times U}}$$

pour un certain K. $\square$

Une variété B est contractile quand il existe une homotopie lisse $f_t : B \to B$, $t \in [0,1]$ tq $f_0 = id$, $f_1 \equiv x_0 \in M$

exemple B^n est contractile



⚠ À partir de la dim 3, $\exists$ variétés contractiles pas homéomorphes à une boule

Corollaire Toute fibré vectoriel $E \to B$ avec B contractile est triviale

Preuve $h_t : B \to B$, $h_0 = id$, $h_1 \equiv x_0$

$$E \cong h_0^* E \cong h_1^* E$$

$$\begin{array}{c} h_1^* E = B \times E_{x_0} \\ \downarrow \\ B \end{array} \quad \text{trivial}$$

$\square$