CONNEXIONS

Comment définir la dérivée directionnelle d'un champ de vecteurs ?

V, W champ de vecteurs sur M

" $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V(x+\varepsilon W(x)) - V(x)}{\varepsilon}$ " ??

Une option est la **dérivée de Lie** $\mathcal{L}_W V = [V,W]$

⚠ $W_x = 0 \not\Rightarrow (\mathcal{L}_W V)_x = 0$

$E \xrightarrow{\pi} B$ fibré vectoriel, $\quad \Gamma(E) = \{\text{sections}\}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \rotatebox{90}{$\in$}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad s$

NOTATION.

$s_x = s(x) \in E_x$

Une **connexion** est une application

$$\nabla \quad \underbrace{\Gamma(TB)}_{\substack{\text{champs} \\ \text{de vect.}}} \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E), \quad (V,s) \longmapsto \nabla_V s$$

telle que

1) $\nabla_{fV+W} s = f \nabla_V s + \nabla_W s \quad \forall f \in C^\infty(B),\ V, W \in \Gamma(TB)$

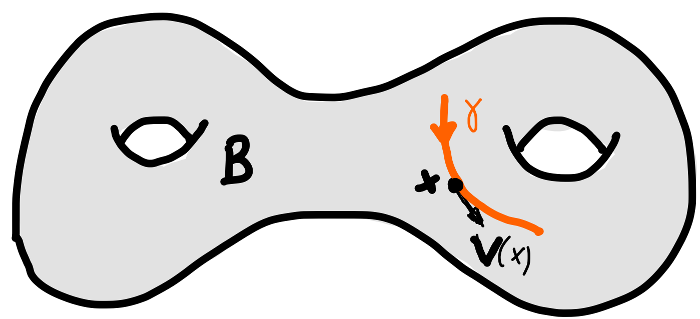
2) $\nabla_V(\lambda s_1 + s_2) = \lambda \nabla_V s_1 + \nabla_V s_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ V \in \Gamma(TB)$, $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$

3) $\nabla_V(fs) = \overbrace{(Vf)}^{x \mapsto df(x)V(x)} s + f \nabla_V s \quad \forall f \in C^\infty(B), s \in \Gamma(E), V \in \Gamma(TB)$

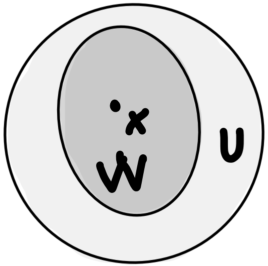
Terminologie $\nabla_V s$ = dérivée covariante de s par rapport à V

Prop $(\nabla_V s)_x \in E_x$ est complètement déterminé par $V(x)$ et $s \circ \gamma$, où $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow B$

$\gamma(0) = x \quad \dot\gamma(0) = V_x$



Preuve

- 

Supposons $V|_U \equiv 0$, où $U \subset B$ est voisinage ouvert de x.

$W \subset B$ voisinage de x tq $\bar{W} \subset U$

$f : B \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ tq. $f|_W \equiv 0$, $f|_{B \setminus U} \equiv 1$

Alors $V = fV$, $(\nabla_V s)_x = (\nabla_{fV} s)_x = \underbrace{f(x)}_{0} (\nabla_V s)_x = 0$

- Supposons $s|_U \equiv 0 \Rightarrow s = fs$

alors $(\nabla_Z s)_x = (\nabla_Z fs)_x = \underbrace{(Zf)_x}_{0} s_x + \underbrace{f(x)}_{0} (\nabla_Z s)_x = 0$

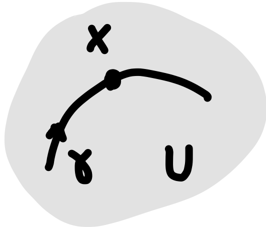
$\Rightarrow (\nabla_V s)_x$ dépende seulement des "germes" de V et s en x

(i e dépende seulement de $V|_U$ et $s|_U$, où $U \subset B$ voisinage arbitraire de x)

- Si $V_x = 0$ alors, en coordonnées locales

$$V = \sum_i V^i \partial_{x^i}$$

$$(\nabla_V s)_x = \sum_i \underbrace{V^i(x)}_{0} \nabla_{\partial_{x^i}} s = 0$$

• 

si $U \subset B$ est voisinage pétit de x
alors $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ (le fibré restraint est triviale)

$\exists\, e_1, \dots, e_r \in \Gamma(E|_U)$ tq

$$\mathrm{vect}\{e_1(y), \dots, e_r(y)\} = E_y \quad \forall y \in U$$

$$s|_U = s_1 e_1 + \dots + s_m e_m, \quad \text{où } s_i \in C^\infty(U)$$

si $s \circ \gamma \equiv 0$, $\gamma(0) = x$, $\dot\gamma(0) = v$, alors

$$(\nabla_v s)_x = \sum_i \underbrace{(v s_i)}_{\frac{d}{dt} s_i(\gamma(t))\big|_{t=0} = 0} e_i + \underbrace{s_i(x)}_{0} \nabla_v e_i = 0$$

□

Rmq On peut aussi voir ∇ comme une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\nabla \quad \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*B \otimes E)$$
$$s \longmapsto \nabla s$$

(où $(\nabla s)(V) = \nabla_V s$)

telle que

$$\nabla(f s) = f \nabla s + df \otimes s \qquad \forall f \in C^\infty(B), \; s \in \Gamma(E)$$

(RÈGLE DE LEIBNITZ)

example

- Dans $T\mathbb{R}^N$ on a la connexion plate ∇, qui correspond à la dérivée usuelle.

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{V(W^i)}_{x \mapsto dW^i(x)V(x)} \partial_{x^i} \qquad \text{où } W = \sum_{i=1}^{N} W^i \partial_{x^i}$$

- $\forall A \in \mathrm{End}(T\mathbb{R}^N)$ on a la connexion ∇^A

$$\nabla^A_V W = \nabla_V W + AW$$

CONNEXIONS LINÉAIRES

M variété diff, TM et T^*M fibrés tg et cotg

fibrés tensoriels $\quad T^p_q M = \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{\times p} \otimes \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{\times q}$

$p, q \geq 0$

Rmq
- $T^0_0 M = M \times \mathbb{R}$

  avec espace des sections $\Gamma(T^0_0 M) = C^\infty(M)$

- $T^*M = T^1_0 M$

Une connexion ∇ sur TM induit une unique connexion sur chaque $T^p_q M$, qu'on indique toujours par ∇

- on $T^0_0 M$ $\quad \nabla_V f = V f \qquad \forall f \in \Gamma(T^0_0 M)$
- $\nabla_V (F \otimes G) = (\nabla_V F) \otimes G + F \otimes (\nabla_V G)$
- $\nabla_V (\mathrm{contr}^j_i (F)) = \mathrm{contr}^j_i (\nabla_V F)$

où $\mathrm{contr}^j_i \; T^p_q M \to T^{p-1}_{q-1} M$ linéaire $\quad \begin{pmatrix} \omega_i \in T^*_x M \\ V_i \in T_x M \end{pmatrix}$

$$\mathrm{contr}^j_i (\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_q)$$
$$= \omega_j (V_i)\, \omega_1 \otimes \cdot \cancel{\omega_j} \cdot \otimes \omega_p \otimes V_1 \otimes \cdot \cancel{V_i} \cdot \otimes V_q$$

On appelle **connexion linéaire** la famille de connexions associées sur $T^p_q M$, $p,q \geq 0$.

exemple

∇ connexion linéaire

$\underset{\text{1-forme}}{\omega \in \Gamma(T^*M)}$, $\underset{\text{champs de vecteurs}}{W, V \in \Gamma(TM)}$

$$W(\omega(V)) = \nabla_W(\omega(V)) = \nabla_W\left(\mathrm{contr}^1_1(\omega \otimes V)\right)$$

$$= \mathrm{contr}^1_1\left((\nabla_W \omega) \otimes V + \omega \otimes (\nabla_W V)\right) = (\nabla_W \omega)(V) + \omega(\nabla_W V)$$

Connexion en coordonnés locales

∇ connexion linéaire sur M

$U \subset M$ avec coordonnés locales $x^1, \ldots, x^n$

$V, W \in \Gamma(TU)$ champs de vecteurs sur U

$$\Longrightarrow \quad V = \sum_i V^i \partial_{x^i}, \qquad W = \sum_i W^i \partial_{x^i}$$

$$\nabla_V W = \sum_j \left[(V W^j)\,\partial_{x^j} + W^j\, \nabla_V \partial_{x^j} \right]$$

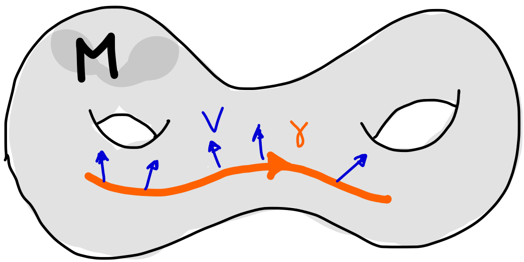
$$= \sum_j \left[(V W^j)\,\partial_{x^j} + \sum_i W^j V^i \underbrace{\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j}}_{*} \right]$$

Le terme $*$ est de la forme.

$$\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k\, \partial_{x^k} ,$$

où $\Gamma_{ij}^k \;\; U \longrightarrow \mathbb{R}$ symboles de Christoffel

Dérivée covariant d'un champ de vecteurs le long d'une courbe



$\gamma : I \to M$ courbe lisse

$\gamma^* TM$

$\Gamma(\gamma^* TM) = \{$champs de vecteurs le long de $\gamma\}$

i.e

$V \in \Gamma(\gamma^* TM)$ est une application $V : I \to TM$

t.q. $V(t) \in T_{\gamma(t)} M \quad \forall t \in I$

Une connexion linéaire sur M induit une connexion sur $\gamma^* TM$

Vu que $\dim(I) = 1$, on voit cette connexion comme un operateur $\nabla_t : \Gamma(\gamma^* TM) \circlearrowleft$

Propriétés

- $\nabla_t(\lambda V + W) = \lambda \nabla_t V + \nabla_t W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\nabla_t(f V) = \dot{f} V + f \nabla_t V \quad \forall f : I \to \mathbb{R}$
- Si $V = \tilde{V} \circ \gamma$, où $\tilde{V} \in \Gamma(TM)$

  alors $\nabla_t V = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{V}$

MÉTRIQUES RIEMANNIENNES

M variété différentiable

$p, q \geq 0$

Fibré des (p,q)-tenseurs $\quad T^p_q M = \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{\times p} \otimes \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{\times q}$

Champ tensoriel du type (p,q) $\quad h \in \Gamma(T^p_q M)$

exemple $\quad h \in \Gamma(T^2_0 M)$

$\forall x \in M \quad h_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire

Une **métrique riemannienne** est un champ tensoriel g du type $(2,0)$ tq

- $g(v,w) = g(w,v) \quad \forall\, v,w \in T_x M$

  (g est symmetrique)

- $g(v,v) > 0 \quad \forall\, v \in T_x M \setminus \{0\}$

  (g est définie positive)

i.e $\forall x \in M$ $\quad g_x$ est un produit scalaire sur $T_x M$

(M, g) est dite une variété riemannienne

$\| \ \|_g$ norme riemannienne, i.e. $\|v\|_g = \sqrt{g(v,v)}$

Rmq Si $x^1, \dots, x^n$ sont coordonné locales sur $U \subseteq M$, on pose

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R}, \quad g_{ij}(x) = g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})\Big|_x$$

$$\Longrightarrow \quad g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \, dx^i \otimes dx^j \qquad \begin{pmatrix} g_{ij} = g_{ji} \\ g_{ii} > 0 \end{pmatrix}$$

Rmq Toute variété differentiable (Hausdorff et à base denombrable) admet une métrique riemannienne

atlas. $U_\alpha \subset M$ ouvert avec coordonnées locales $x_\alpha^1, \quad , x_\alpha^n$

$$M = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} U_\alpha$$

$$\left(\begin{array}{l} \operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha \\ \sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1 \end{array} \right)$$

$\rho_\alpha . M \to [0,1]$ partition de l'unité subordonnée à l'atlas

on construit

$$g := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \rho_\alpha \sum_{i=1}^{n} dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i$$

Rmq (M,g) variété riemannienne

$\iota : N \hookrightarrow M$ immersion $\left(\begin{array}{l}\text{i.e.} \\ d\iota(x) : T_xN \hookrightarrow T_{\iota(x)}M \\ \text{injective } \forall x \in M\end{array}\right)$

$h = \iota^* g$ métrique riemannienne sur N

$$h(v,w) = g\left(d\iota(x)v, d\iota(x)w\right)$$
$$\forall x \in N,\ v,w \in T_xN$$

Constructions associées à une métrique riemannienne

- Isomorphisme de fibrés vect

$$\begin{aligned} TM &\xrightarrow{\cong} T^*M \\ v &\longmapsto v^\flat = g(v, \ ) \\ \omega^\# &\longleftarrow\!\!| \ \omega \end{aligned}$$

si $v = \sum_i v^i \partial_{x^i}|_x$ alors $v^\flat = \sum_{i,j} g_{ij} v^i dx^j|_x$

si $\omega = \sum_i \omega_i dx^i|_x$ alors $\omega^\# = \sum_{i,j} g^{ij} \omega_i \partial_{x^j}$

où $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ (matrice inverse)

g induit une "metric riem sur les covecteurs", qui est le $(0,2)$-champ tenseur

$$g = \sum_{i,j} g^{ij} \partial_{x^i} \otimes \partial_{x^j}$$

<u>**Rmq**</u> $\quad g(v,w) = g(v^\flat, w^\flat) \quad w, v \in T_x M$

En fait, g induit une métrique riemannienne sur le fibré de (p,q)-tenseurs.

$$g\left(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q,\ \omega_1' \otimes \dots \otimes \omega_p' \otimes v_1' \otimes \dots \otimes v_q'\right)$$

$$= g(\omega_1, \omega_1') \dots g(\omega_p, \omega_p')\, g(v_1, v_1') \dots g(v_q, v_q')$$

- g permet d'integrer des fonctions sur M

Prop Si (M^n, g) est orientée, (forme volume riemann)

$\exists !$ forme volume $vol \in \underbrace{\Omega^n(M)}_{n\text{-formes sur } M}$

t q $vol(e_1, .., e_n) = 1$

$\forall$ base orthonormale orientée $e_1, .., e_n \in T_xM$

Rmq Si M n'est pas orientable, on peut toujours définir une densité riemannienne $|vol_g|$

Preuve

$e_1, .., e_n$ base orthonormale orientée de $T_x M$

$e^1, .., e^n$ base duale de $T_x^* M$ i.e. $e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$vol_x = e^1 \wedge .. \wedge e^n$

- Si $f_1, .., f_n$ est une base orth orientée de $T_x M$

alors $f_i = \sum_j f_i^j e_j$, $\det(f_i^j)_{ij} = 1$

$$vol_x(f_1, .., f_n) = \underbrace{\det(f_i^j)_{ij}}_{1} \underbrace{vol_x(e_1, .., e_n)}_{1} = 1$$

- $x \mapsto vol_x$ est bien C^∞.

$\partial_{x^1} \ldots \partial_{x^n}$ base orientée

$x^1, \ldots, x^n$ coordonnée locales orientés définie autour de x

base o.n. orientée

$$e_i = \sum_j e_i^j \partial_{x^j}\Big|_x$$

$$\Rightarrow \det(e_i^j)_{ij} > 0$$

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

$$I = (e_i^j) \cdot (g_{ij}) \cdot (e_i^j)$$

$$\delta_{ij} = g(e_i, e_j) = \sum_{k,l} g_{kl}\, e_i^k e_i^l$$

$$\Rightarrow 1 = \det(g_{ij}) \det(e_i^j)^2$$

$$\det(e_i^j) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}$$

$$1 = \mathrm{vol}(e_1, .., e_n) = \det(e_i^j)\, \mathrm{vol}_x(\partial_{x^1}, .., \partial_{x^n})$$

$$\mathrm{vol} = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge .. \wedge dx^n$$

$\Rightarrow$ $x \mapsto \mathrm{vol}_x$ est bien C^∞

$\square$