Supposons (M,g) orientée et compacte

- $\mathrm{Vol}(M,g) = \int_M \mathrm{vol}$

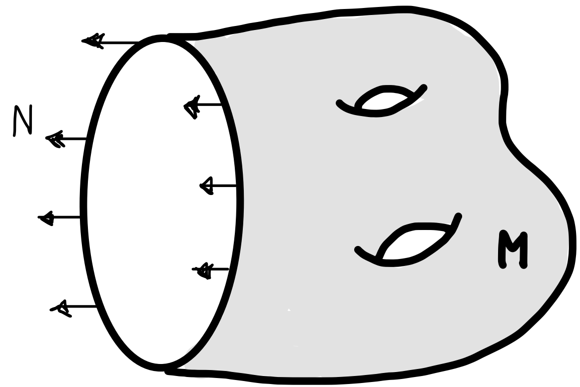
- V champ de vecteurs
divergence $\quad \mathrm{div}(V) \in C^\infty(M)$
définie par $\underbrace{\mathcal{L}_V \mathrm{vol}}_{\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \phi_t^* \mathrm{vol}} = \mathrm{div}(V)\, \mathrm{vol}$, où ϕ_t flot de V

Rmq $\mathrm{div}(V) = 0$ ssi ϕ_t preserve le volume

$$\boxed{\begin{array}{c} \phi_t^* \mathrm{vol} = \mathrm{vol} \\ \forall t \\[1em] \mathrm{Vol}(U) = \mathrm{Vol}(\phi_t(U)) \\ \forall\, U \subset M \text{ ouv} \end{array}}$$

(M,g) orientée, compacte à bord

$v \lrcorner \beta = \beta(v, \cdot, \cdot)$



$N \; \partial M \to TM|_{\partial M}$

champ de vecteurs normale unitaire orienté vers l'extérieure

On fixe l'orientation sur ∂M tq $vol_{\partial M} = N \lrcorner vol_M$

formes vol rem de $(\partial M, g)$ et (M,g)

Thm de la divergence

$\forall V \in \Gamma(TM)$

$$\int_M div(V)\, vol_M = \int_{\partial M} g(V,N)\, vol_{\partial M}$$

Preuve calcule direct

Cartan. $\mathcal{L}_W \beta = d(W \lrcorner \beta) + W \lrcorner d\beta$

$$\int_M \operatorname{div}(V)\, vol_M = \int_M \mathcal{L}_V\, vol_M \overset{\text{Cartan}}{=} \int_M d(V \lrcorner vol_M)$$

$$= \int_{\partial M} V \lrcorner vol_M = \int_{\partial M} g(V,N)\, N \lrcorner vol_M + \underbrace{\int_{\partial M} V' \lrcorner vol_M}_{=0}$$

$V|_{\partial M} = g(V,N)\,N + V'$

où $V' \in T(\partial M)$

$$= \int_{\partial M} g(V,N)\, N \lrcorner vol_M \qquad \square$$

- $f \in C^\infty(M)$

gradient $\nabla f = df^\#$ (champ de vecteurs sur M)

i.e. $g(\nabla f(x), v) = df(x)v$

Prop (Intégration par parties)

$$\int_M g(\nabla f, V)\, vol_M = -\int_M f\, div(V)\, vol_M + \int_{\partial M} f\, g(V, N)\, vol_{\partial M}$$

Preuve exercice !

- $f \in C^\infty(M)$

  laplacien $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) \in C^\infty(M)$

Prop (Identité de Green) $\forall f, h \in C^\infty(M)$

$$\int_M f \Delta h \, vol_M = -\int_M g(\nabla f, \nabla h) \, vol_M + \int_{\partial M} f \, dh(N) \, vol_{\partial M}$$

Preuve

- $\mathrm{div}(fV) = df(V) + f \, \mathrm{div}(V)$

$$\mathrm{div}(fV) vol_M = d(fV \lrcorner vol_M) = \underbrace{df \wedge (V \lrcorner vol_M)}_{-V\lrcorner(\cancel{df \wedge vol_M}) + df(V) vol_M} + f d(V \lrcorner vol_M) = (df(V) + f \, \mathrm{div}(V)) vol_M$$

- $$\int_M f\,\Delta h\,\mathrm{vol}_M = \int_M \mathrm{div}(f\,\nabla h)\,\mathrm{vol}_M - \int_M df(\nabla h)\,\mathrm{vol}_M$$

$$= \int_{\partial M} g(f\,\nabla h, N)\,\mathrm{vol}_{\partial M} - \int_M g(\nabla f, \nabla h)\,\mathrm{vol}_M$$

thm de la div

$\square$

- **Opérateur de Hodge** $\quad * \quad \Lambda^p(T^*M) \xrightarrow{\text{lin}} \Lambda^{n-p}(T^*M)$ où $n = \dim M$

$$\alpha \wedge * \beta = g(\alpha, \beta)\, \mathrm{vol}$$

(si $\alpha = \alpha_1 \wedge .. \wedge \alpha_p$, $\beta = \beta_1 \wedge . \wedge \beta_p$, alors

$$g(\alpha, \beta) = \det\left(g(\alpha_I, \beta_J)\right)_{IJ} \Big)$$

Prop $\forall\, e_1, .., e_n$ base orthonormale orientée de $T_x M$

$e^1, .., e^n$ base duale de $T_x^* M$

$$*(e^1 \wedge .. \wedge e^p) = e^{p+1} \wedge . \wedge e^n$$

Preuve

$$e^1 \wedge . \wedge e^p \wedge *(e^1 \wedge .. \wedge e^p) = \|e^1 \wedge . \wedge e^p\|_g^2 \ \mathrm{vol} = \mathrm{vol}$$

$$= e^1 \wedge .. \wedge e^n$$

$$\Rightarrow *(e^1 \wedge .. \wedge e^p) = e^{p+1} \wedge . \wedge e^n + \alpha,$$

$$g(e^{p+1} \wedge .. \wedge e^n, \alpha) = 0$$

If $\alpha \neq 0$ then $\exists \ i_1 > p, i_2, .., i_p$ and $\lambda \neq 0$ s.t.

$$e^{i_1} \wedge . \wedge e^{i_p} \wedge \alpha = \lambda \ \mathrm{vol}$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{i_1} \wedge .. \wedge e^{i_p} \wedge *(e^1 \wedge . \wedge e^p)}_{= e^{i_1} \wedge .. \wedge e^{i_p} \wedge \alpha = \lambda \ \mathrm{vol} \neq 0} = \underbrace{g(e^{i_1} \wedge . \wedge e^{i_p}, e^1 \wedge . \wedge e^p)}_{=0} \mathrm{vol}$$

$\square$

Rmq $\forall \alpha$ p-forme $\quad **\alpha = (-1)^{p(n-p)}\alpha$

$(n = \dim M)$

Prop. $*df = \nabla f \lrcorner \mathrm{vol} \quad \forall f \cdot M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$

Preuve

- Vrai en x si $df(x) = 0$
- Si $df(x) \neq 0$ $\quad \exists\, e_1, \dots, e_n$ base orthonormale orientée de T_xM

tq. $\nabla f(x) = \lambda e_1$, où $\lambda \neq 0$

$$\Rightarrow df(x) = g(\lambda e_1, \ ) = \lambda e^1$$

$$* df(x) = \lambda e^2 \wedge . \wedge e^n = \nabla f \lrcorner \underset{e^1 \wedge .. \wedge e^n}{\underset{\parallel}{\mathrm{vol}}}$$

$\square$

Prop $\Delta f = * d * d f \qquad \forall f \in C^\infty(M)$

Preuve

$$(\Delta f)\,\mathrm{vol} = \mathrm{div}(\nabla f)\,\mathrm{vol} = d(\underbrace{\nabla f \lrcorner \mathrm{vol}}_{* d f})$$

$$* \mathrm{vol} = 1$$

$\square$

FONCTIONS HARMONIQUES

(M,g) orientée, connexe

$f \in C^\infty(M)$ est **harmonique** quand $\Delta f \equiv 0$

Rmq Si M compacte, $\Delta f = \Delta h = 0$, et $f|_{\partial M} = h|_{\partial M}$ alors $f \equiv h$

$$\Delta(f-h) \equiv 0, \quad (f-h)|_{\partial M} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_M (f-h)\,\Delta(f-h)\,\mathrm{vol} \overset{\text{GREEN}}{=} -\int_M \|\nabla(f-h)\|_g^2\,\mathrm{vol}$$

$$\Rightarrow \nabla(f-h) \equiv 0 \Rightarrow \nabla f \equiv \nabla h \Rightarrow f \equiv h$$

En particulier, si $\partial M = \emptyset$, $\Delta f \equiv 0$ alors $f \equiv$ const

Lemme (M,g) variété riem

$\forall x \in M$ $\exists$ voisinage $U \subset M$ de x et $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$

t q. $\Delta f \equiv 0$, $df(x) \neq 0$

DIFFÉOMORPHISMES CONFORMES

Qu'est-ce qu'un "isomorphisme" entre variétés riemanniennes ?

(M,g), (N,h) variétés riem

Un difféo $\varphi : M \to N$ est une isométrie quand $\varphi^* h = g$

$$(\varphi^* h)_x = h_{\varphi(x)}\left(d\varphi(x)\cdot, d\varphi(x)\cdot\right)$$

Une notion plus faible

Un difféo $\Psi : M \to N$ est conforme quand
$\Psi^* h = e^f g$ pour une certain $f : M \to \mathbb{R}$

(ie Ψ preserve les angles entre vecteurs, mais pas forcement les longueurs des vecteurs

$$g(v,w) = 0 \iff h\big(d\Psi(x)v, d\Psi(x)w\big) = 0$$
)

Thm (Korn-Lichtenstein, 1916)

Toute surface riemannienne (M,g) est **localement conforme** à l'espace euclidien

i.e. $\forall p \in M$ $\exists$ coordonnées locales x, y

dans un voisinage $U \subset M$ de p

t.q. $g|_U = e^f (dx \otimes dx + dy \otimes dy)$

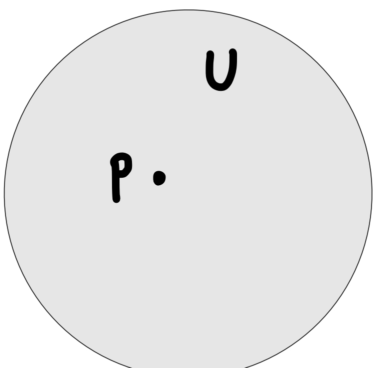
où $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$

Preuve

- $p \in M$ point donné $\Rightarrow$ $\exists\, W \subset M$ vois ouv de p tq (W, g) est orientable
- (par le lemme précedent)

  $\exists\, U \subset W$ vois de p, et $x . U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ tq

  $\Delta x \equiv 0 \quad dx(p) \neq 0$



On demande que U soit un boule

- $0 = \Delta x = * \underbrace{d * dx}_{=0}$

$\Rightarrow$ $* dx$ est une 1-forme fermée dans U

$\Rightarrow$ (Lemme de Poincaré) $* dx$ est exacte

$\exists\, y : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ tq $* dx = dy$

- On montre que, quitte à restreindre U autour de p, x, y sont les coordonnées cherchées

- $\|dx\|_g \neq 0$ et $\|dy\|_g \neq 0$ en p

$$dx \wedge dy = dx \wedge * dx = \|dx\|_g^2 \, \mathrm{vol}$$

$\Rightarrow$ $dx|_p$ et $dy|_p$ sont linéairement indep

$\Rightarrow$ $\phi = (x,y) \cdot U \to \mathbb{R}^2$, $d\phi(p)$ isom

$\Rightarrow$ quitte à restreindre U, ϕ est une carte

- $\|dx\|_g^2 \, vol = dx \wedge *dx = dx \wedge dy = -(*dy) \wedge dy$

$$= dy \wedge *dy = \|dy\|_g^2 \, vol$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\partial_x\|_g^2 = \|\partial_y\|_g^2 = e^f}, \quad \text{où } f : U \to \mathbb{R}$$

- $g(dx, dy) \, vol = dx \wedge *dy = -dx \wedge dx = 0$

$$\Rightarrow \boxed{g(\partial_x, \partial_y) = 0}$$

$$\Rightarrow g = e^f \left(dx \otimes dx + dy \otimes dy \right)$$

$\square$