CONNEXION DE LEVI-CIVITA

(M, g) variété riemannienne

∇ connexion linéaire

∇ est **compatible** avec g quand $\nabla g \equiv 0$

$$\Big(Z\big(g(X,Y)\big) = \underbrace{(\nabla_Z g)}_{=0}(X,Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)\Big)$$

Z, X, Y champs de vect

Rmq Cette condition ne détermine pas uniquement ∇

exemple $(\mathbb{R}^n, g = \langle \, , \, \rangle)$ espace euclidien

- ∇ connexion plate (ie $\nabla X = dX$)

$$\Rightarrow \quad d(\langle X, Y \rangle) = \langle \nabla X, Y \rangle + \langle X, \nabla Y \rangle$$

- $\tilde{\nabla} = \nabla + A$, où A matrice anti-symm

$$\Rightarrow \langle \tilde{\nabla} X, Y \rangle + \langle X, \tilde{\nabla} Y \rangle = \underbrace{\langle \nabla X, Y \rangle + \langle X, \nabla Y \rangle}_{d(\langle X, Y \rangle)} + \underbrace{\langle AX, Y \rangle + \langle X, AY \rangle}_{0}$$

Torsion de ∇

$$\tau \in \Gamma(T^2_1 M) \qquad \text{i.e. } \tau_x \in (T^2_1 M)_x$$

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

vérifions que τ est bien un champ tensoriel

$f : M \to \mathbb{R}$, X, Y champs de vect. sur M

$$\tau(fX,Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX,Y]$$

$$= f \nabla_X Y - f \nabla_X Y - \cancel{(Yf)} X - f[X,Y] + \cancel{(Yf)} X$$

$$= f\,\tau(X,Y) = \,.\, = \tau(X, fY)$$

Thm Toute variété riemannienne (M,g) a une unique connexion linéaire ∇ (la connexion de Levi-Civita) compatible avec g et symmetrique (i.e. $T=0$)

Preuve

- Unicité.

① $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

② $Y(g(Z,X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$

③ $Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$

① + ② − ③ .

$$X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y))$$
$$= 2\, g(\nabla_Y X, Z) + g([X,Y],Z) + g([X,Z],Y) + g([Y,Z],X)$$

- <u>Existence</u>

vérifiez par exercice que ∇ définie par l'expression précédente est bien une connexion.

$\square$

exemples

- ∇ connexion plate de $(\mathbb{R}^n, g = \langle\ ,\ \rangle)$ est la connexion de Levi-Civita.

$$\left(\nabla\left(\sum_J X^J \partial_{x_J}\right) = dX^J \otimes \partial_{x^J}\right) \qquad \left(\text{i.e. } \nabla X \equiv dX\right)$$

$$d\langle X, Y\rangle = \langle dX, Y\rangle + \langle X, dY\rangle$$

$$= \langle \nabla X, Y\rangle + \langle X, \nabla Y\rangle$$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = dY(X) - dX(Y) = [X, Y]$$

• $(\tilde{M}, \tilde{g})$ avec Levi-Civita $\tilde{\nabla}$

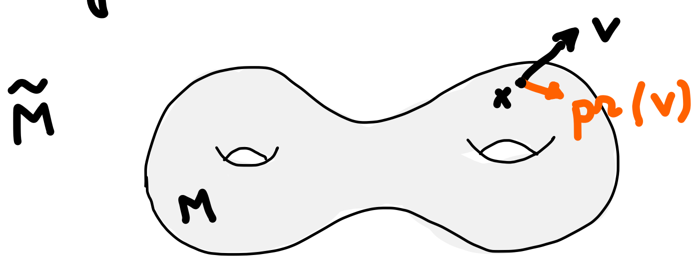
$\iota \; M \hookrightarrow \tilde{M}$ sous-variété $\qquad g = \iota^* \tilde{g}$

inclusion

$pr \quad T\tilde{M}|_M \xrightarrow{\text{lin.}} TM$ projection orthogonale

i e $\quad pr(v) = v \quad \forall v \in T_x M$

$g(v - pr(v), w) = 0 \quad \forall v \in T_x \tilde{M}, \; w \in T_x M$



On défine une connexion lin ∇ sur M.

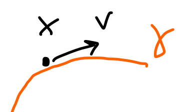
$$\nabla_v W = pr\left(\tilde{\nabla}_v W\right)$$

où $v \in T_xM$, W champ de vect sur M

Question ∇ bien définie ?

si ∇ conn lin. sur M

$\Rightarrow$ $\nabla_v W$ est bien déf. $\forall v \in T_xM$



$\forall$ W déf le long d'une telle γ

∇ est bien une connexion

$$\nabla_{fV} W = pr\, \tilde{\nabla}_{fV} W = f \nabla_V W$$

$$\nabla_V (fW) = pr\left((Vf) W + f \tilde{\nabla}_V W \right)$$
$$= (Vf) W + f \nabla_V W$$

Prouvons que ∇ est la connexion de Levi-Civita de (M,g)

∇ compatible avec g.

V, W, Z champs de vect sur M

$\tilde{V}, \tilde{W}, \tilde{Z}$ extensions à $\tilde{M}$

$$Z(g(V,W)) = \tilde{Z}\left(\tilde{g}(\tilde{V},\tilde{W})\right)\Big|_M$$

$$= \left(\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\tilde{V},\tilde{W}) + \tilde{g}(\tilde{V},\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\tilde{W})\right)\Big|_M$$

$$= g(\nabla_Z V, W) + g(V, \nabla_Z W)$$

∇ est symmetrique

V, W champs de vect sur M

$\tilde{V}, \tilde{W}$ extensions à $\tilde{M}$

Rmq $[\tilde{V}, \tilde{W}]_x = [V, W]_x \quad \forall x \in M$

$$\nabla_V W - \nabla_W V = pr\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W} - \tilde{\nabla}_{\tilde{W}} \tilde{V}\right)$$

$$= pr\left([\tilde{V}, \tilde{W}]\right) = [V, W]$$

En particulier

$\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ sous-variété

$$g = \iota^*\big(\underbrace{dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^N \otimes dx^N}_{g_0}\big)$$

métrique euclidienne

∇ Levi-Civita de M est donnée par

$$(\nabla_V W)_x = pr\big(\underbrace{dW(x)V(x)}_{\sum_{j,i=0}^{N} \partial_{x^i} W^j(x) V^i(x)\, \partial_{x^j}}\big),$$

où $V = \sum_i V^i \partial_{x^i}$

$W = \sum_i W^i \partial_{x^i}$

Thm (Plongement isometrique, Nash 1956)

Toute variété riemannienne (M, g) est une sous-variété d'un espace euclidien,

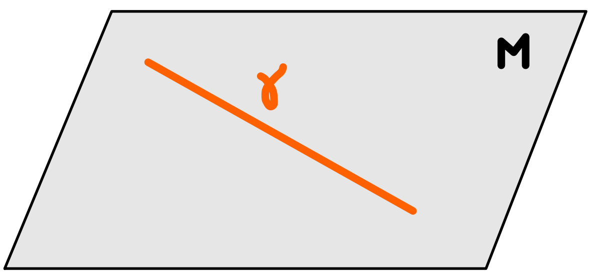
i.e. $\exists$ plongement $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$

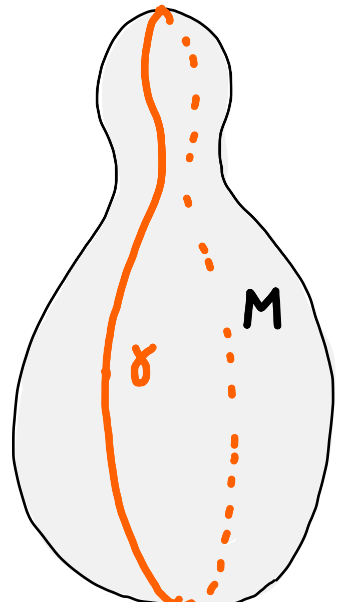
tq $g = \iota^*(dx^1 \otimes dx^1 + \ldots + dx^N \otimes dx^N)$

$$\left(N \leq \max\left\{ \frac{n(n+5)}{2}, \frac{n(n+3)}{2} + 5 \right\}, \text{ où } n = \dim M \right)$$

GÉODÉSIQUES

Les géodésiques de (M, g) sont les "courbes droites"





(M,g) variétés riemanniennes

∇ Levi-Civita

Une geodesique de (M,g) est une courbe lisse $\gamma : (a,b) \to M$ tq $\boxed{\nabla_t \dot\gamma \equiv 0}$ et qui n'est pas constante

En coordonnés locales $x^1, \dots, x^n$

$$\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n), \quad \dot\gamma(t) = \sum_i \dot\gamma^i(t) \, \partial_{x^i}\big|_{\gamma(t)}$$

$$\gamma^i := x^i \circ \gamma$$

$$0 = \nabla_t \dot\gamma = \sum_i \left(\dot\gamma^i(t)\,\partial_{x^i} + \sum_j \gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)\nabla_{\partial_{x^j}}\partial_{x^i} \right)$$

$$= \sum_i \left(\dot\gamma^i(t) + \sum_{j,k} \gamma^j \gamma^k \Gamma^i_{jk}(\gamma(t)) \right) \partial_{x^i}$$

Cela est une O.D.E de la forme

$$\ddot\gamma(t) = F\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)$$

$\Rightarrow \forall x \in M, v \in T_x M,$

$\exists! \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$

t.q. γ sol. ODE

$\gamma(0) = x, \ \dot\gamma(0) = v$

$$\boxed{\nabla_t \left(f\,\partial_{x_i}|_\gamma \right) = \dot f\,\partial_{x_i}|_{\gamma(t)} + f\,\nabla_{\dot\gamma(t)}\partial_{x^i}}$$

Autrement dit :

Prop $\exists$ champ de vecteurs X sur TM tq son flot est de la forme

$$\phi_t\big(\underbrace{\gamma(0),\dot\gamma(0)}_{\in TM}\big) = \big(\underbrace{\gamma(t),\dot\gamma(t)}_{\in TM}\big),$$

où γ est une géod
(ou une constante si $\dot\gamma(0)=0$)

X = champ de vecteurs géodésique

ϕ_t = flot géodésique

Rmq Comme ∇ est Levi-Civita, on a

$\forall V, W$ champs de vecteurs le long de $\gamma\ (a,b) \to M$ (i.e. $V(t), W(t) \in T_{\gamma(t)}M$)

$$\frac{d}{dt} g(V,W) = g(\nabla_t V, W) + g(V, \nabla_t W)$$

- si $\gamma(t) = 0$: en coordonnées locale

$$\frac{d}{dt} g(V(t), W(t)) = \frac{d}{dt} \sum_{i,j} g_{ij}(\gamma(t)) V^i(t) W^j(t)$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij}(\gamma(t)) \left(\dot{V}^i(t) W^j(t) + V^i(t) \dot{W}^j(t)\right)$$

$$= g(\nabla_t V, W) + g(V, \nabla_t W)$$

- si $\dot\gamma(t) \neq 0$ alors " $\nabla_t = \nabla_{\dot\gamma(t)}$ "

près de $\gamma(t)$ on a $\quad V = \tilde V \circ \gamma, \quad W = \tilde W \circ \gamma$

où $\tilde V, \tilde W$ champs de vecteurs sur M

$$\frac{d}{dt} g\big(V(t), W(t)\big) = \dot\gamma(t)\, g(\tilde V, \tilde W)$$

$$= g\big(\nabla_{\dot\gamma(t)} \tilde V, \tilde W\big) + g\big(\tilde V, \nabla_{\dot\gamma(t)} \tilde W\big)$$

$$= g\big(\nabla_t V, W\big) + g\big(V, \nabla_t W\big)$$

Prop Chaque geodesique γ a vitesse constante $\|\dot\gamma(t)\|_g \equiv \text{const} > 0$

Preuve

$$\frac{d}{dt} g(\dot\gamma(t), \gamma(t)) = g(\underbrace{\nabla_t \dot\gamma}_{0}, \dot\gamma(t)) + g(\dot\gamma(t), \underbrace{\nabla_t \dot\gamma}_{0}) = 0$$

$\square$

Rmq Si $\gamma : (a,b) \to M$ est une géodésique

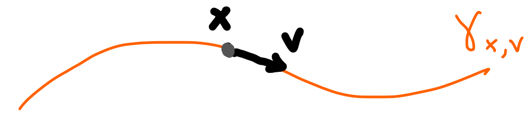
et $\tau \; (c,d) \xrightarrow{\cong} (a,b)$ est difféo affine

$(\text{i e} \quad \dot{\tau} \equiv \lambda \neq 0)$

alors $\xi = \gamma \circ \tau$ est une geodesique

$$\left(\begin{array}{l} \dot{\xi}(s) = \dot{\gamma}(\tau(s))\,\lambda \\ \nabla_s \dot{\xi} = \nabla_{\dot{\xi}(s)} \dot{\xi}(s) = \nabla_{\lambda \dot{\gamma}(t)} \left(\lambda \dot{\gamma}(t)\right) = \lambda^2 \nabla_t \dot{\gamma} = 0 \end{array}\right)$$

• $\forall x \in M$, $v \in T_x M$



$\gamma_{x,v}$ geodesique tq $\gamma_{x,v}(0) = x$, $\dot{\gamma}_{x,v}(0) = v$
(ou courbe const.)

• $\pi \; TM \to M$, $\pi(x,v) = x$ $\gamma_{x,v}(t) = \pi \circ \phi_t(x,v)$

flot géodésique

application exponentielle $\exp \; U \to M$

$$(x,v) \mapsto \exp_x(v) := \gamma_{x,v}(1)$$

où $U \subset TM$ voisinage ouvert de la $\underbrace{\text{section nulle}}_{0_M = \{(x,0) \in TM \mid x \in M\}}$

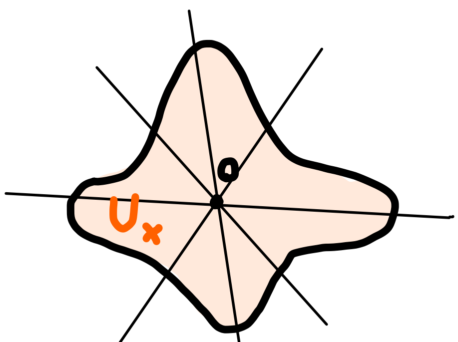
Rmq $t \in \mathbb{R}$, $v \in T_xM$

- $\exp_x(tv) = \gamma_{x,tv}(1) = \gamma_{x,v}(t)$

- Soit $U \subset TM$ le domaine maximal de exp

$\forall x \in M$, $U_x := U \cap T_xM$ (domaine de $\exp_x$) est voisinage ouvert étoilé de $0 \in T_xM$

(à cause du point précédent)



- $\exp_x : U_x \to M$ $\qquad U_x := U \cap T_xM$, $\exp_x = \exp|_{U_x}$

$$d\exp_x(0)v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_x(tv) = \dot{\gamma}_{x,v}(0) = v$$

$$\Rightarrow d\exp_x(0) = id_{T_xM}$$

par le thm de la fonction inverse

$\exists\, \varepsilon > 0$ $\qquad B(0_x, \varepsilon) = \{ v \in T_xM \mid \|v\|_g < \varepsilon \}$

tq $\quad \exp_x|_{B(0_x,\varepsilon)}$ est un difféomorphisme

sur son image.

Rayon d'injectivité

$$\operatorname{inj}(x) := \sup \left\{ \varepsilon > 0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exp_x|_{B(0_x,\varepsilon)} \text{ est} \\ \text{difféo sur son} \\ \text{image} \end{array} \right\}$$

$W \subseteq M$

$$\operatorname{inj}(W) := \inf \{ \operatorname{inj}(x) \mid x \in W \}$$

Prop Tout $x \in M$ a un voisinage $W \subseteq M$ tq $\operatorname{inj}(W) > 0$

En particulier $\operatorname{inj}(K) > 0$ $\forall K \subseteq M$ compact

Preuve

$$F : \underset{\underset{(x,0)}{\cup\!\!\!\!\!\text{ }}}{U} \to M \times M, \quad F(x,v) = (x, \exp_x(v))$$

$$dF(x,0) : T_{(x,0)}U \to T_{(x,x)}(M \times M) \quad \text{inversible}$$

$$\left(\text{en coordonnés locales} \quad dF(x,0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \partial_x (\exp_x(v))\big|_{v=0} & d\exp_x(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \right)$$

F est un diffeo. local en $(x,0)$

$\Rightarrow \exists\ W_0 \subset M$ voisinage de x

$\delta > 0$

$W := \{ (y,w) \in U \mid y \in W_0,\ \|w\|_g < \delta \}$

tq $F|_W$ difféo sur son image

$\Rightarrow \forall y \in W_0 \qquad \exp_y : B(0_y, \delta) \longrightarrow M$ difféo sur son image

$\left(\begin{array}{l} \text{car } F|_{\{y\}\times B(0,\delta)} = (y, \exp_y(\ )) \\ \{y\}\times B(0_y,\delta) \subset W \end{array} \right)$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} J(W_0) \geq \delta > 0 \qquad \square$$

Toute metrique riemannienne est localement euclidienne à l'ordre 1

$q \in M$, $\quad e_1, \ldots, e_n \in T_qM$ base orthonormale

$\psi \quad B(0,\delta) \to M$, $\quad \psi(x^1, \ldots, x^n) = \exp_q(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n)$

$ \underset{\mathbb{R}^n}{\cap}$

$\phi = \psi^{-1} = (x^1, \ldots, x^n) \quad \psi(B(0,\delta)) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad$ carte

$x^1, \ldots, x^n$ coordonnés normales géodésiques centrées en q

en ces coordonnés

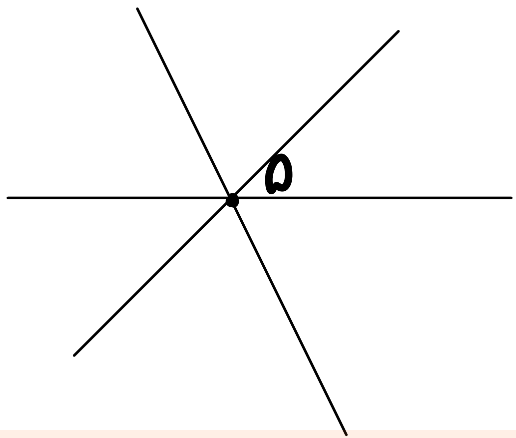
$$g_{ij}(q) = g_q\left(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}\right)$$

$$= g_q\left(d\exp_q(0)\,e_i\,,\,d\exp_q(0)\,e_j\right)$$

$$= g_q(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

$$g_q = dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n$$

les geodesiques qui passent par q, en ces coordonnés, sont les droites qui passent par $0 \in \mathbb{R}^n$



γ geod tq $\gamma(0) = q$

$$\Rightarrow \gamma(t) = \Psi(tv)$$

où $\gamma(0) = d\Psi(0)v$

exercice Montrer que $dg_{ij}(q) = 0$, $\underbrace{\Gamma_{ij}^{k}}_{\text{symboles de Christoffel}}(q) = 0$