Toute metrique riemannienne est localement euclidienne à l'ordre 1

$q \in M$, $\quad e_1, .., e_n \in T_qM$ base orthonormale

$$\psi \quad \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{B(0,\delta)} \longrightarrow M, \quad \psi(x^1,\dots,x^n) = \exp_q(x^1 e_1 + \dots + x^n e_n)$$

$\delta \in (0, \operatorname{inj}(x)]$

$$\phi = \psi^{-1} = (x^1,\dots,x^n) \quad \psi(B(0,\delta)) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{carte}$$

$x^1, .., x^n$ coordonnées normales géodésiques centrées en q

en ces coordonnés

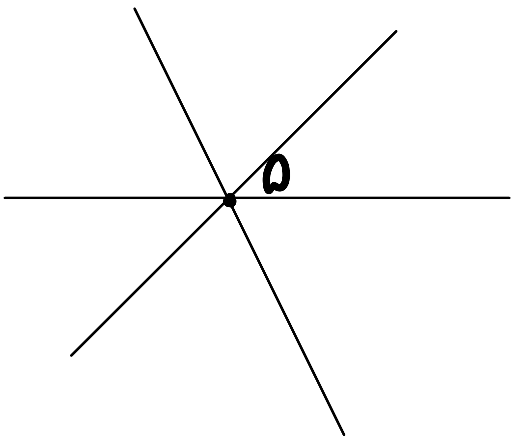
$$g_{ij}(q) = g_q(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$$

$$= g_q(d\exp_q(0)e_i, d\exp_q(0)e_j)$$

$$= g_q(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$g_q = dx^1 \otimes dx^1 + \ldots + dx^n \otimes dx^n$$

les geodesiques qui passent par q, en ces coordonnés, sont les droites qui passent par $0 \in \mathbb{R}^n$



γ geod tq $\gamma(0) = q$

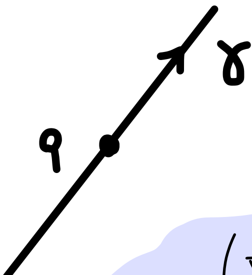
$$\Rightarrow \gamma(t) = \Psi(tv)$$

où $\gamma(0) = d\Psi(0)v$

Prop. $\Gamma_{ij}^{k}(q) = 0$, $dg_{ij}(q) = 0$

Preuve

γ géodésique arbitraire tq $\gamma(0) = q$



$(x^i \circ \gamma =: \gamma^i)$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma}^k \equiv 0 \quad \forall k$$

$(\nabla_t \dot{\gamma} \equiv 0)$

eq géodésique :

$$0 = \underbrace{\ddot{\gamma}^k}_{=0} + \sum_{i,j} \gamma^i \gamma^j \, \Gamma_{ij}^{k}(\gamma) \qquad \forall k = 1, \dots, n$$

en $q = \gamma(0)$ on a.

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^{k}(q) \, v^i v^j = 0 \qquad \text{où } v = \gamma(0)$$

En choisissant v tq $v^i = v^j = 1$, $v^k = 0 \ \forall k \neq i, j$

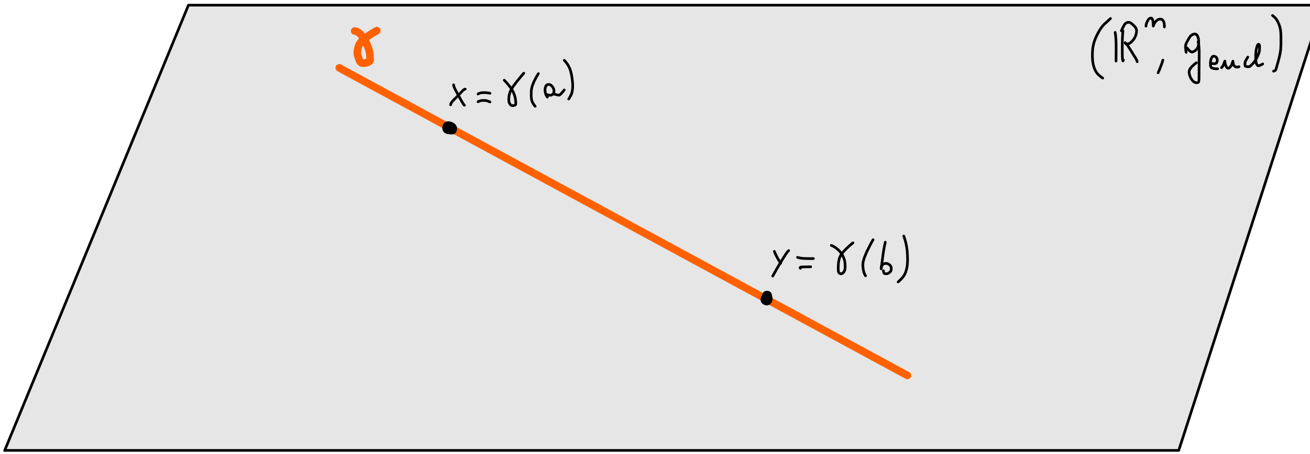
on a $\Gamma_{ij}^k(q) = 0$

On a prouvé. $\Gamma_{ij}^k(q) = 0 \quad \forall i, j, k.$

$$\begin{aligned}
\partial_{x^i} g_{jk}(q) &= \partial_{x^i}\left(g(\partial_{x^j}, \partial_{x^k})\right)\Big|_q \\
&= g(\underbrace{\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j}}_{=0}, \partial_{x^k})\Big|_q + g(\partial_{x^j}, \underbrace{\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^k}}_{=0})\Big|_q \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

THÉORIE VARIATIONNELLE DES GÉODÉSIQUES



Les géodesiques euclidienne sont les droîtes
Elle sont aussi le courbes plus courtes entre
deux points. $\text{longueur}\left(\gamma|_{[a,b]}\right) = \|x - y\| = d(x,y)$

Et dans une variété riemannienne ?

(M^m, g) variété riemannienne connexe

$\gamma \; [a,b] \to M$ C^∞ par morceaux, et C^0

$\left(a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \quad \text{t.q.} \quad \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \; C^\infty \right)$

longueur de γ $$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_g \, dt$$

(bien définie pour γ absolument continue)

Rmq $L(\gamma)$ est indépendante de la parametrisation de γ

$$\left(\begin{array}{l} \tau : [c,d] \xrightarrow{\cong} [a,b] \quad \text{diffeo} \\ \zeta := \gamma \circ \tau \\ L(\zeta) = \int_c^d \|\dot\gamma(\tau(s))\|_g \, |\dot\tau(s)| \, ds = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_g \, dt = L(\gamma) \end{array}\right)$$

Par contre l'energie $E(\gamma) = \int_a^b \|\gamma(t)\|_g^2 \, dt$

dépende de la parametrisation de γ.

distance riemannienne

$$d : M \times M \to [0,\infty)$$

C^∞ par morceaux

$$d(x,y) = \inf \left\{ L(\gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : [0,1] \to M \\ \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{array} \right\}$$

$$d(x,x) = 0 \quad \forall x \in M$$

$$d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in M$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in M$$

Prop $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$

(donc d est bien une distance)

Preuve On fixe $x \in M$

- $\phi = (x^1, \dots, x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ carte centrée en x
  $U \subset M$

  $g_0 = \phi^* \underbrace{g_{eucl}}_{\text{métrique euclidienne}}$

- $\exists\, \delta > 0$ t.q. $\|v\|_g \geq 2\delta \|v\|_{g_0} \quad \forall v \in T_x M$

- $\exists\, W \subset U$ voisinage de x tq

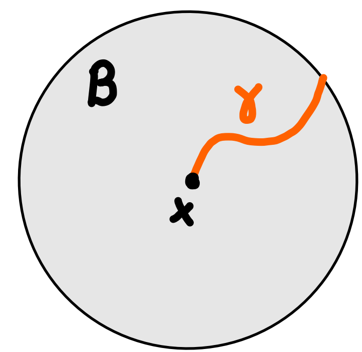
$$\|v\|_g \geq \delta \|v\|_{g_0} \qquad \forall\, y \in W,\ v \in T_y M$$

- $\varepsilon > 0$ petit tq $\underbrace{B(0,\varepsilon)}_{\text{boule euclidienne}} \subseteq \phi(W)$

$$B = \phi^{-1}(B(0,\varepsilon)) \subset M$$

$\forall\, \gamma : [0,1] \to W$ tq $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) \in \partial B$

on a $\displaystyle\int_0^1 \|\gamma(t)\|_{g_0} \geq \varepsilon$



$$\Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma\|_g \, dt \geq \delta \varepsilon > 0$$

- $\forall\, y \in M \setminus \{x\}$ on peut choisir $\varepsilon > 0$ petit tq $y \notin B = \phi^{-1}(B(0,\varepsilon))$

$$\Rightarrow \quad d(x,y) \geq \delta \varepsilon .$$

distance riemannienne

$\square$

exercice La topologie d'espace métrique de (M,d) coïncide avec la topologie de M comme variété différentiable

<u>Thm</u> (Principe de moindre action)

Une courbe $\gamma : [a,b] \to M$ C^∞ par morceaux est une geodesique

ssi

$\|\dot\gamma(t)\|_g \equiv \text{const} > 0$ et γ est un point critique de la fonctionnelle longueur L

Notion naïve de point critique.

$\gamma\ [a,b] \to M$ C^∞ par morceaux est un **point critique** de L quand

$$\partial_s\big|_{s=0} L(\Gamma(s,\cdot)) = 0$$

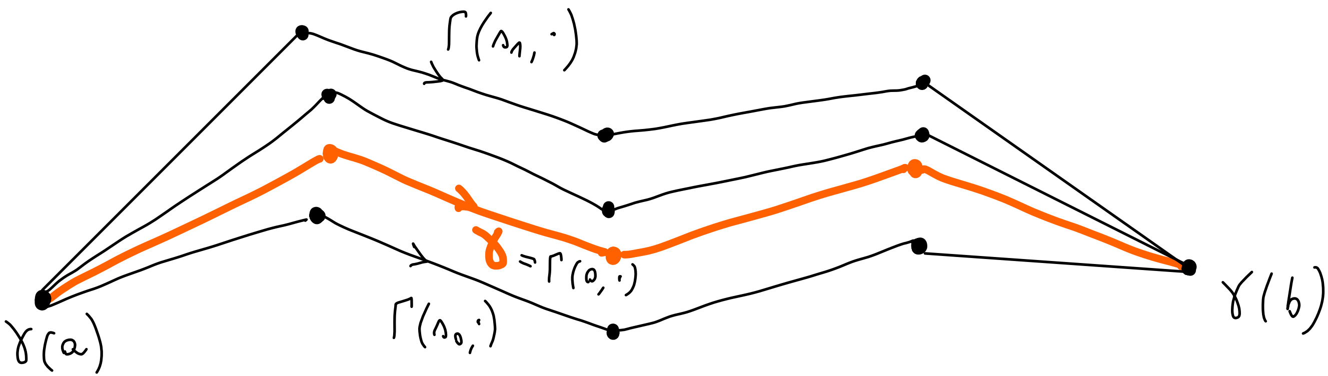
$\forall\, \Gamma : (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b] \xrightarrow{C^0} M$ t.q. 1) $\Gamma(0,\cdot) = \gamma$

2) $\Gamma(s,a) = \gamma(a)$, $\Gamma(s,b) = \gamma(b)$ $\forall s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$

3) $a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$

$\Gamma\big|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_i,t_{i+1}]}$ C^∞ $\forall i = 0,\dots,K-1$

Γ



(On appelle Γ une **déformation de γ à extrémités fixées**)

Preuve

Γ déf de γ à extrémités fixées

$$V(t) = \partial_s\big|_{s=0} \Gamma(s,t)$$

champ de vect. le long de γ
(C^∞ par morceaux, $V(a)=0$, $V(b)=0$)

$$dL(\gamma)V = \partial_s\big|_{s=0} L(\Gamma(s, \cdot)) = \sum_{i=0}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \partial_s\big|_{s=0} \overbrace{\|\partial_t \Gamma(s,t)\|_g}^{\sqrt{g(\partial_t\Gamma, \partial_t\Gamma)}} \, dt$$

$$= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2\|\partial_t\Gamma\|_g} 2\, g(\underbrace{\nabla_s \partial_t \Gamma}_{\nabla_t \partial_s \Gamma}, \partial_t \Gamma)\big|_{s=0} \, dt$$

(on va le vérifier dans un instant)

$$= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{\|\gamma\|_g} g(\nabla_t V, \dot\gamma)\, dt$$

(dépende seulement de γ et V)

(supposons $\|\dot\gamma\|_g \equiv c > 0$)

$$= \frac{1}{c}\left[-\sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\nabla_t \dot\gamma, V(t))\, dt + \sum_{i=1}^{k-1} g\big(\dot\gamma(t_i^-) - \dot\gamma(t_i^+), V(t_i)\big)\right]$$

integr par parties

Si γ est un géodésique, alors $\nabla_t \dot\gamma \equiv 0$, $\dot\gamma(t_i^-) = \dot\gamma(t_i^+)$

$\Longrightarrow$ γ est un point critique de L

Si $\|\gamma\|_g \equiv c > 0$ et γ est un point critique de L, alors :

- en prenant V tq $\mathrm{supp}(V) \subset (t_i, t_{i+1})$ on déduit $\nabla_t \dot\gamma = 0$ $\forall t \in (t_i, t_{i+1})$ $\Rightarrow$ $\nabla_t \dot\gamma \equiv 0$ $\forall t \in [a,b] \setminus \{t_0, \dots, t_k\}$

- en prenant V t.q $t_i \in \mathrm{supp}(V) \subset (t_{i-1}, t_{i+1})$ on a
$$0 = dL(\gamma)V = \frac{1}{c}\, g\left(\gamma(t_i^-) - \dot\gamma(t_i^+), V(t_i)\right)$$
donc $\dot\gamma(t_i^-) = \dot\gamma(t_i^+)$

$\Rightarrow$ γ est C^1 $\Rightarrow$ $\nabla_t \dot\gamma \equiv 0$ $\forall t$ $\Rightarrow$ γ géodésique $\square$

Si $\Psi : (a,b) \times (c,d) \to M$ C^∞, alors
$\quad\quad\quad s \quad\quad\quad t$

$$\nabla_t \partial_s \Psi = \sum_i \left(\partial_t \partial_s \Psi^i + \sum_{j,k} \partial_t \Psi^j \, \partial_s \Psi^k \, \underbrace{\Gamma^i_{jk}}_{= \Gamma^i_{kj}} \big(\Psi(s,t) \big) \right) \partial_{x^i}$$

coordonnées locales

car :

$$= \nabla_s \partial_t \Psi$$

$$\boxed{\begin{gathered} \sum_i \Gamma^i_{jk} \, \partial_{x^i} = \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^k} \\ 0 = [\partial_{x^j}, \partial_{x^k}] = \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^k} - \nabla_{\partial_{x^k}} \partial_{x^j} \end{gathered}}$$

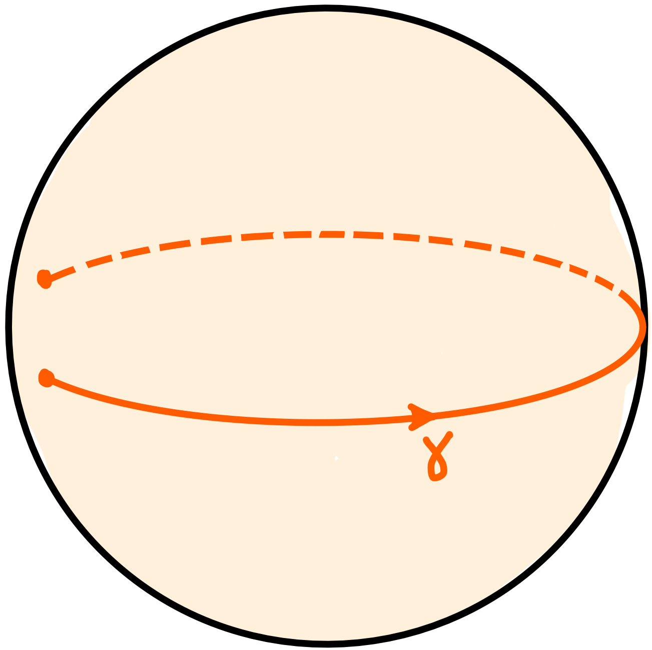
Si $\gamma : [a,b] \to M$ C^∞ par morceaux satisfait
$$L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$$
alors γ est une géodésique

Si $\gamma\ [a,b] \to M$ est une géodésique, est-il vrai que $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$?

Oui si $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{eucl})$

Faux en général.

$(M,g) = (S^2, g_{\text{ronde}})$



Néanmoins ...

Lemme de Gauss

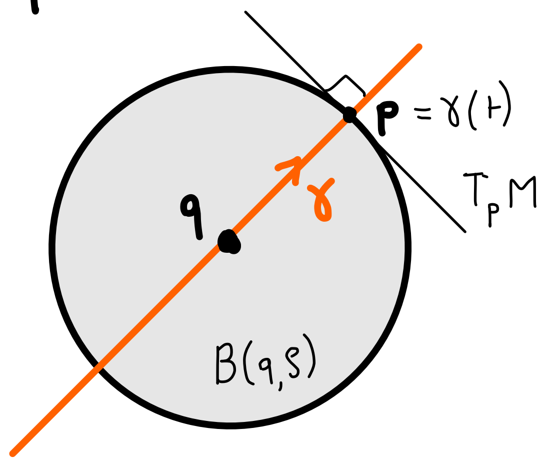
$$g\left(d\exp_q(v)v,\ d\exp_q(v)w\right) = g(v,w) \quad \forall v,w \in T_qM$$

$\underline{\text{Rmq}}$ $T_v(T_qM) \equiv T_qM$

$\delta > 0$

$B(q,\delta) = \{\exp_q(v) \mid \|v\|_q < \delta\}$

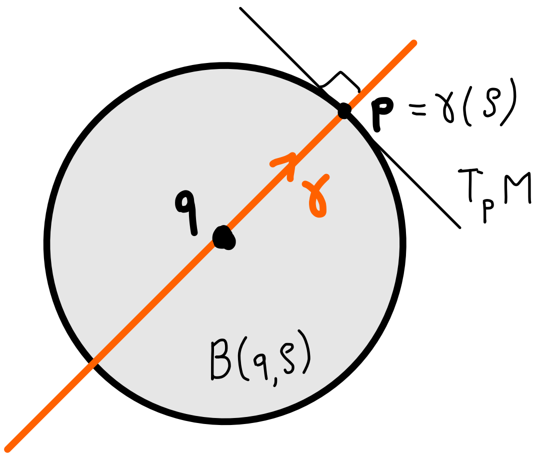
En particulier.



si $\delta < \mathrm{inj}(q)$

$$\dot\gamma(t) \perp_g T_p(\partial B(q,\delta))$$

En fait.



$$\|\dot\gamma\|_g \equiv 1$$

$w \in T_p(\partial B(q,s))$ arbitraire

$$g(\dot\gamma(s), w) \overset{?}{=} 0 \qquad (*)$$

On peut écrire w comme $w = \dot\omega(0)$ pour un certain $\omega : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \partial B(q,s)$ tq $\omega(0) = p$

$$\Rightarrow \omega(\lambda) = \exp_q(s\, v(\lambda)), \quad \text{où } v(\lambda) \in T_qM, \ \|v(\lambda)\| \equiv 1$$
$$v(0) = \dot\gamma(0)$$

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \|v(s)\|_g^2 = 2g(v(0), v(0)) = g(\dot v(0), \dot\gamma(0))$$

donc

$$g(\dot\gamma(s), w) = g\big(d\exp_q(s\dot\gamma(0))\,\dot\gamma(0),\ d\exp_q(s\dot\gamma(0))\,s\,v(0)\big)$$

$$\underset{\text{Gauss}}{=} g(\dot\gamma(0), \dot v(0)) = g(\dot\gamma(0), w) = 0$$

Preuve du lemme de Gauss

- Vrai si $v=0$ ou $w=0$

- Vrai si $w=\lambda v$, car

$$\gamma(t) := \exp_q(tv) \quad \text{geod}$$

$$\| d\exp_q(v)v \|_g = \| \dot\gamma(1) \|_g = \| \dot\gamma(0) \|_g = \| v \|_g$$

- Il reste à considérer le cas où $g(v,w)=0$

$\Rightarrow \exists$ courbe lisse $\sigma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to T_qM$, $\sigma(0)=v$, $\dot\sigma(0)=w$

$\|\sigma(s)\|_g \equiv \|v\|_g$ $\forall t$

$$\Gamma : (-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1] \to M, \quad \Gamma(s,t) = \exp_q(t\sigma(s))$$

$$g(\overbrace{\partial_s\Gamma}^{=0 \text{ en } t=0}, \partial_t\Gamma)\Big|_{s=t=0} = 0 = g(v,w)$$

$$g(\partial_s\Gamma, \partial_t\Gamma)\Big|_{\substack{s=0\\t=1}} = g\big(d\exp_q(v)w,\ d\exp_q(v)v\big)$$

Il me reste à prouver que $t \longmapsto g(\partial_t \Gamma, \partial_s \Gamma)\big|_{s=0}$ est constante :

$$\partial_t\, g(\partial_t \Gamma, \partial_s \Gamma) = g\Big(\underbrace{\nabla_t \partial_t \Gamma}_{\substack{=0,\\ \text{car } t \mapsto \Gamma(t,s) \\ \text{est une géodésique}}}, \partial_s \Gamma\Big) + g\Big(\partial_t \Gamma, \underbrace{\nabla_t \partial_s \Gamma}_{\nabla_s \partial_t \Gamma}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\, \partial_s \underbrace{\|\partial_t \Gamma\|_g^2}_{\equiv \|w\|_g} = 0$$

$\square$