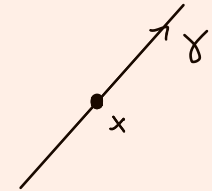
Lemme

$\tau \in (0, \mathrm{inj}(x))$, $v \in T_xM$, $\|v\|_g = 1$

$\gamma : [0,\tau] \to M$, $\gamma(t) = \exp_x(tv)$



Si $\zeta : [0,\tau] \to M$ C^∞ par morceaux satisfait

$\|\zeta\| \equiv \text{const}$, $\zeta(0) = \gamma(0)$, $\zeta(\tau) = \gamma(\tau)$,

$L(\zeta) \leq L(\gamma)$

alors $\zeta \equiv \gamma$

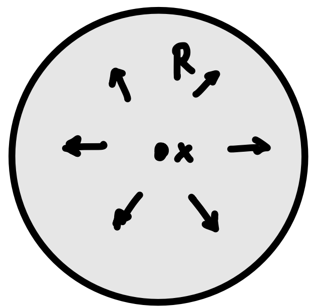
Preuve

$\delta = \operatorname{inj}(x)$

- champ de vecteurs radial sur $B(x, \delta) \setminus \{x\}$

$$R(\exp_x(tw)) = \frac{d}{dt} \exp_x(tw),$$

$\forall w \in T_x M$ avec $\|w\|_g = 1$, $t \in (0, 1]$



$\|R\|_g \equiv 1$

R est tangent à chaque géodésique qui passe par x

- R est un gradient.

$$\boxed{R = \mathrm{grad}(r)}, \quad \text{où} \quad r : B(x,\delta)\setminus\{x\} \to (0,\delta)$$

$$r\big|_{\partial B(x,s)} \equiv s$$

En fait.

$$r(\exp_x(tw)) = t, \quad \forall\, w \in T_xM \text{ avec } \|w\|_g = 1$$

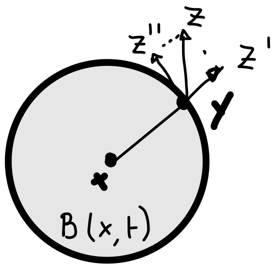
$$t \in (0,1]$$

$$y = \exp_x(tw)$$

$$z \in T_yM$$

(*) $g(\mathrm{grad}(r)_y, R(y)) = dr(y)R(y) = \frac{d}{dt} \underbrace{r(\exp_x(tw))}_{t} = 1$

donc on peut écrire tout $z \in T_yM$ comme



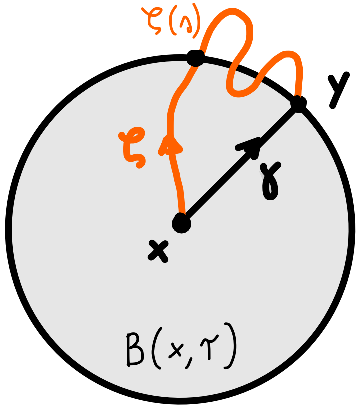
$$z = \underset{\substack{\| \\ aR(y)}}{z'} + \underset{\substack{\in \\ \mathrm{Ker}\, dr(y) = T_y(\partial B(x,t))}}{z''}$$

Par lemme de Gauss $g(z', z'') = 0$,

et par (*) on a $dr(y)z' = g(R(y), z')$

$$g(R(y), z) = \underbrace{g(R(y), z')}_{dr(y)z' = dr(y)z} + \underbrace{g(R(y), z'')}_{0} = dr(y)z$$

•



$\xi : [0,T] \to M$ C^∞ par morceaux

t.q. $\xi(0) = x, \ \xi(T) = y$

(on pourrait même prendre une telle ξ absolument continue)

on peut supposer $\|\dot{\xi}\| \equiv 1$

$$s := \min\{ t > 0 \mid \xi(t) \in \partial B(x,r) \}$$

$$\xi(t) = \underbrace{a(t)}_{dr(\xi(t))\xi(t)} R(\xi(t)) + S(t),$$ pour presque tout $t \in [0,s]$

$$g(R(\xi(t)), S(t)) = 0$$

$$L(\zeta) \geq \int_0^s \|\zeta\|_g \, dt = \int_0^s \sqrt{|a(t)|^2 + \|S(t)\|_g^2} \, dt$$

$=$ si $s = T$

$$\geq \int_0^s |a(t)| \, dt = \int_0^s |dr(\zeta(t))\dot{\zeta}(t)| \, dt$$

$=$ si $S \equiv 0$

$$\geq \int_0^s dr(\zeta(t))\dot{\zeta}(t) \, dt = r(\underbrace{\zeta(s)}_{\in \partial B(x,T)}) - r(\underbrace{\zeta(0)}_{=x}) = T = L(\gamma)$$

$=$ si $a(t) \geq 0$ $\forall t$

$$\Rightarrow \quad L(\zeta) \geq L(\gamma)$$

$$= \quad \text{ssi} \quad \zeta = \gamma$$

$\square$

Rmq

- $\forall\, \delta < \operatorname{inj}(x)$ on a $B(x,\delta) = \{y \in M \mid d(x,y) < \delta\}$

$$\overset{\displaystyle B(x,\delta)}{\shortparallel} \quad \{\exp_x(v) \mid \|v\|_g < \delta\}$$

- $\forall$ geod. $\gamma : (a,b) \longrightarrow M$ on a $L(\gamma|_{[t_0,t_1]}) = d(\gamma(t_0),\gamma(t_1))$

  si $t_1 - t_0 < \operatorname{inj}(\gamma(t_0))$

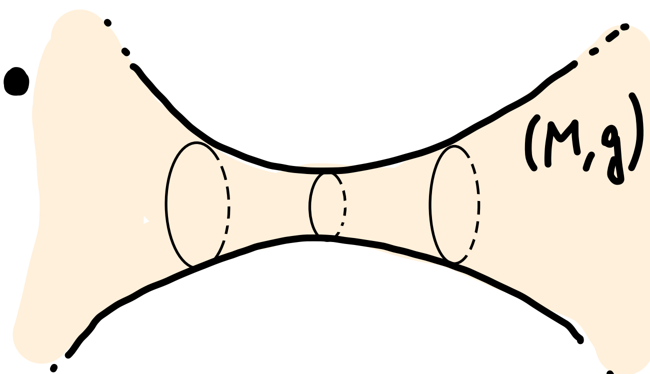
COMPLÉTUDE DE (M, d_g)

exemples:

- (M,g) fermée, $\dim M > 1$

  $(M \setminus \{x\}, d)$ n'est pas complet

  distance riemannienne

- 

  (M,g) cylindre hyperbolique

  (M,d) complet

Thm (Hopf - Rinow)

(M,g) variété riemannienne connexe avec $\partial M = \emptyset$
$d : M \times M \to [0,\infty)$ distance riemannienne
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) (M,d) est un espace métrique complet
2) (M,g) est géodesiquement complète $\forall x \in M$ $\exp_x : T_xM \to M$ bien défini
3) $\exists\, x \in M$ tq. $\exp_x : T_xM \to M$ bien défini
4) Tout $C \subset M$ fermé et borné est compact

Si ces conditions sont vérifiées, alors $\forall x,y \in M$ avec $x \neq y$
$\exists$ geod. $\gamma : [0,1] \to M$ tq $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, $L(\gamma) = d(x,y)$

Preuve

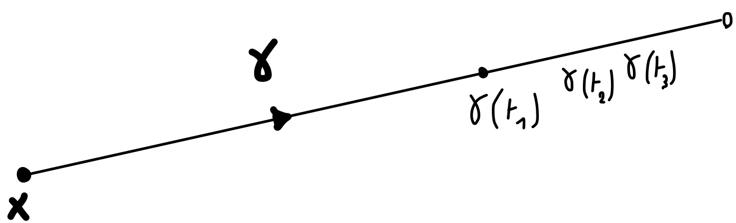
1) ⇒ 2)

Supposons (M,d) complet

$x \in M$, $v \in T_x M$, $\|v\|_g = 1$, $\quad \gamma(t) = \exp_x(tv)$

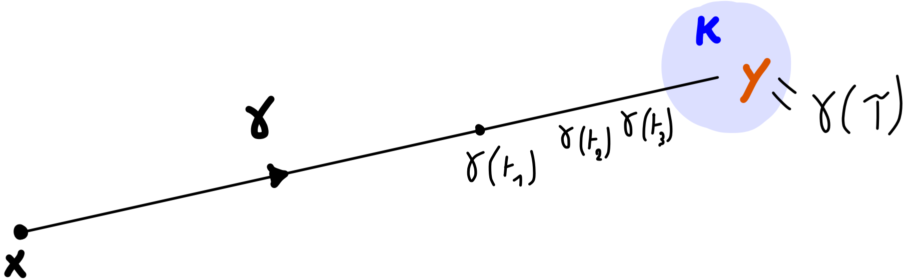
Supposons $\gamma(t)$ bien défini pour $t \in [0, \tau)$, $\tau < \infty$

$t_n \to \tau^-$



$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_{n+1})) \leq |t_{n+1} - t_n|$$

$\Rightarrow \gamma(t_n)$ suite de Cauchy $\Rightarrow \gamma(t_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} y = \gamma(\tau)$



$K \subset M$ voisinage compact de y

$\delta = \operatorname{inj}(K) > 0$

n grand t.q. $d(\gamma(t_n), y) < \delta$, $\gamma(t_n) \in K$

$\Rightarrow$ $\gamma(t)$ est bien défini $\forall\, t \in (0, \overbrace{t_n + \delta}^{> T})$

car $\gamma(t) = \exp_{\gamma(t_n)}\big((t - t_n)\,\dot\gamma(t_n)\big)$

$t \in [t_n, t_n + \delta)$

$$② \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \forall\, x \neq y \quad \exists \text{ geod } \gamma : [0,T] \to M \\ \text{tq. } \gamma(0) = x,\ \gamma(T) = y,\ L(\gamma) = d(x,y) \end{array} \right] (*)$$

$0 < \delta < \operatorname{inj}(x)$

$\partial B(x,\delta)$ compact $\Rightarrow \exists\, z \in \partial B(x,\delta)$ tq

$$d(z,y) = \min_{w \in \partial B(x,\delta)} d(w,y)$$

$v \in T_xM$, $\|v\|_g = 1$ tq $\exp_x(\delta v) = z$

$\gamma : [0,\infty) \to M, \quad \gamma(t) = \exp_x(tv)$

$$I = \{ t \in [0,\infty) \mid \underbrace{t}_{L(\gamma|_{[0,t]}) \geq d(x,\gamma(t))} + d(\gamma(t), y) = d(x,y) \} \ni \delta$$

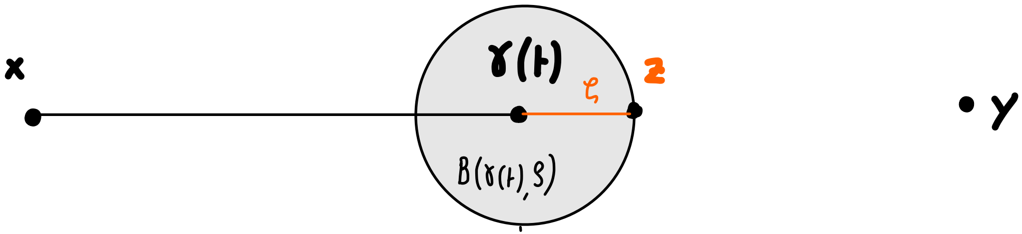
Il faut prouver que $\max I = d(x,y)$

I fermé, $\delta \in I$

Il suffit de prouver que $\forall t \in (0, d(x,y)) \cap I$

$\exists \delta > 0$ tq $t+\delta \in I$

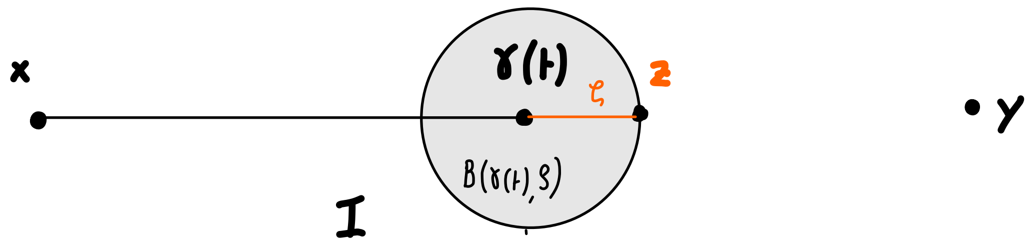
$t \in I \cap (0, d(x,y))$



$$\begin{cases} 0 < \delta < \operatorname{inj}(\gamma(t)) \\ \delta < d(\gamma(t), y) \end{cases} \qquad z \in \partial B(\gamma(t), \delta) \ \text{t.q.} \ d(z,y) = \min_{\partial B(\gamma(t),\delta)} d(\cdot, y)$$

$$w \in T_{\gamma(t)}M, \ \|w\|_g = 1, \ \text{t.q.} \ \zeta : [t, t+\delta] \to M, \ \zeta(s) = \exp_{\gamma(t)}((s-t)w)$$

$$\zeta(t) = \gamma(t), \quad \zeta(t+\delta) = z$$



$$d(x,\gamma(t)) \le \overset{I}{t} = d(x,y) - d(\gamma(t),y) \Rightarrow d(x,\gamma(t)) = t$$

$$d(\gamma(t),y) = d(\gamma(t),z) + d(z,y) = \delta + d(z,y)$$

$$d(x,z) \ge \underbrace{d(x,y)}_{t+d(\gamma(t),y)} - \underbrace{d(z,y)}_{d(\gamma(t),y)-\delta} = t+\delta = L(\gamma|_{[0,t]} * \zeta)$$

$\Rightarrow$ $\gamma|_{[0,t]} * \zeta$ est une géodesique $\nearrow$ $t+\delta \in I$

$$\Rightarrow \gamma|_{[0,t]} * \zeta = \gamma|_{[0,t+\delta]}, \quad t+\delta + d(\gamma(t+\delta),y) = d(x,y)$$

2) $\Rightarrow$ 3) ✓

3) + (*) $\Rightarrow$ 4)

$C \subset M$ fermé et borné, $y \in C$, $\exists r > 0$ tq. $d(y,z) < r \;\; \forall z \in C$

$R = d(x,y) + r$ $\qquad B = \{ v \in T_x M \mid \|v\|_g \leq R \}$

$$\underset{\text{par }(*)}{C \subset} \underset{\text{compact}}{K} := \underbrace{\exp_x(B)}_{\text{bien déf., par 3)}} \Rightarrow C \text{ compact}$$

4) $\Rightarrow$ 1)

$x_n \in M$ suite de Cauchy

$\Rightarrow \exists R > 0$ tq $d(x_n, x_m) \leq R \quad \forall n, m$

$$\Rightarrow \quad x_n \in \underbrace{B(x_1, R)}_{\text{bornée et fermée, donc compacte}} = \{y \in M \mid d(x_1, y) \leq R\}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n_k} \longrightarrow x \in M$$

$\square$