Versions simplifiées du tenseur de courbure

- **Tenseur de Ricci**

  $\binom{2}{0}$-tenseur

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \mathrm{tr}\left(g(R(\,,X)Y,\cdot)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i)$$

où $e_1,\dots,e_n$ base orthonormale de T_qM

Rmq $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$

- Courbure scalaire $\quad S = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ric}(e_i, e_i)$

$$S \in C^\infty(M)$$

Excursus

(M,g) est une variété Einstein quand

$$\mathrm{Ric} = f\, g, \quad \text{où } f \in C^\infty(M)$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathrm{tr}(g) = m = \dim(M) \\ f = \frac{1}{m} \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}) = \frac{S}{m} \end{array} \right)$$

Thm $\hat{S}(g) := \mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2-n}{n}} \int_M S_g \, \mathrm{vol}_g$

$\mathrm{Crit}(\hat{S}) = \{\text{métriques Einstein}\}$

- Courbure sectionnelle

$$K(\Pi) := \frac{R(X,Y,Y,X)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X,Y)^2}$$

où $\Pi = \mathrm{span}\{X,Y\} \subset T_q M$

$\dim \Pi = 2$

Rmq K est bien définie

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{\|X\|_g^2\|Y\|_g^2 - g(X,Y)^2} = g\left(R(E_1,E_2)E_2,E_1\right)$$

si $\Pi = \mathrm{span}\{X,Y\} = \mathrm{span}\{E_1,E_2\}$, $\|E_i\|_g = 1$, $g(E_1,E_2) = 0$

$$\left(\begin{array}{l} A \in \mathrm{End}(T_qM), \quad AE_1 = X, \quad AE_2 = Y \\ g(R(X,Y)Y,X) = g\left(R(AE_1,AE_2)AE_2,AE_1\right) = \underbrace{(\det A)^2}_{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2} g\left(R(E_1,E_2)E_2,E_1\right) \end{array}\right)$$

Rappel.

V espace vectoriel, $\dim(V) = n$

$\omega \in \Lambda^n V$

$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \to \mathbb{R}$ $\quad \omega(v_1, \dots, v_n) = (-1)^\sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$

$\forall \sigma$ permutation de $\{1, \dots, n\}$

$\forall A : V \to V$ lin

$\omega(Av_1, \dots, Av_n) = \det(A)\, \omega(v_1, \dots, v_n)$

Rmq La courbure sectionnelle K détermine le tenseur de Riemann

Preuve

$$Q(X,Y) = g(R(X,Y)Y, X) = K(\mathrm{span}\{X,Y\})\left(\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2\right)$$

(bien déf. $\forall X, Y \in T_qM$; $Q(X,X) = 0$)

$$g(R(X,Z)Z,Y) = \frac{1}{2}\Big(Q(X+Y,Z) - Q(X,Z) - Q(Y,Z)\Big)$$

$$g(R(X,Z+W)(Z+W),Y)$$

$$= g(R(X,Z)Z,Y) + g(R(X,W)W,Y)$$

$$+ g(R(X,Z)W,Y) + g(R(X,W)Z,Y)$$

$$K \rightsquigarrow Q \rightsquigarrow R(X,Z)W + R(X,W)Z$$

si R' $\binom{3}{1}$-tenseur avec les symmetries du tenseur de Riemann, $Q'(X,Y) := R'(X,Y,Y,X)$

$$Q = Q' \Rightarrow R(X,Z)W - R'(X,Z)W = R'(X,W)Z - R(X,W)Z$$

$$\underset{\text{(Bianchi)}}{\Rightarrow} \quad R = R'$$

Prop Si K est constante sur toute fibre de TM,
i.e. $K(\Pi) = K_0(x) \quad \forall \, \Pi \subset T_xM$ 2-plan
alors $R(X,Y)Z = K_0 \cdot \left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \right)$

Preuve $R'(X,Y)Z = K_0\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \right)$

$$R'(X,Y) = -R'(Y,X), \quad g(R'(X,Y)W, Z) = g(R'(W,Z)X, Y)$$

$$R'(X,Y)W + R'(Y,W)X + R'(W,X)Y = 0$$

$$Q'(X,Y) = g(R'(X,Y)Y, X) = K_0 \left(\|Y\|^2 \|X\|^2 - g(X,Y)^2 \right)$$
$$= Q(X,Y)$$

$\square$

COURBURE DES SOUS-VARIÉTÉS RIEM

$(M, g) \xrightarrow[\text{incl}]{\iota} (\tilde{M}, \tilde{g})$ sous-variété riemannienne

$(g = \iota^* \tilde{g})$

∇ $\quad$ $\tilde{\nabla}$

Levi-Civita

$$N_x M = \{ v \in T_x \tilde{M} \mid \tilde{g}(v, w) = 0 \quad \forall w \in T_x M \}, \quad x \in M$$

$x \in M$, $v \in T_x \tilde{M}$ s'écrit comme $v = \underbrace{v^T}_{\in T_x M} + \underbrace{v^N}_{\in N_x M}$

On a déjà vu. $\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^T$

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\tilde{\nabla}_X Y \big|_M = \nabla_X Y + \underbrace{\left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^N}_{=: \, \boxed{\mathrm{II}(X,Y)}}$$

2-ème FORME FONDAMENTALE

__Rmq__ II est un tenseur. $\mathrm{II} \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes NM)$

$$\left(\begin{array}{l} f \in C^\infty(M) \\ \mathrm{II}(fX, Y) = f\, \mathrm{II}(X,Y) \\ \mathrm{II}(X, fY) = \tilde{\nabla}_X (fY)^N = (Xf) \underbrace{Y^N}_{0} + f \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^N = f\, \mathrm{II}(X,Y) \end{array}\right)$$

Rmq $\quad \mathrm{II}(X,Y) = \mathrm{II}(Y,X)$

$$\left(\mathrm{II}(X,Y) - \mathrm{II}(Y,X) = \left(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X\right)^N = [X,Y]^N = 0 \right)$$

Equation de Weingarten

$\forall N \in \Gamma(NM)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, Y) = -\tilde{g}(N, \mathrm{II}(X,Y))$$

Preuve $\quad \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, Y) = X \underbrace{\tilde{g}(N,Y)}_{\equiv 0} - \tilde{g}(N, \underbrace{\tilde{\nabla}_X Y}_{\mathrm{II}(X,Y)})$ $\square$

R = tenseur de Riemann de (M, g)

$\tilde{R}$ = " " " " $(\tilde{M}, \tilde{g})$

$(M,g) \hookrightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$

Prop $\forall\, X, Y, W, Z$ champs de vecteurs sur M

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)W, Z) = g(R(X,Y)W, Z) - \tilde{g}(\mathrm{II}(X,Z), \mathrm{II}(Y,W)) + \tilde{g}(\mathrm{II}(X,W), \mathrm{II}(Y,Z))$$

Proof l.h.s. $= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y W - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X W - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} W, Z)$

$$= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \nabla_Y W - \tilde{\nabla}_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W + \tilde{\nabla}_X \mathrm{II}(Y,W) - \tilde{\nabla}_Y \mathrm{II}(X,W), Z)$$

$$= g(R(X,Y)W, Z) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \mathrm{II}(Y,W) - \tilde{\nabla}_Y \mathrm{II}(X,W), Z)$$

$$= g(R(X,Y)W, Z) - \tilde{g}(\Pi(Y,W), \Pi(X,Z))$$
$$+ \tilde{g}(\Pi(X,W), \Pi(Y,Z))$$
$$\square$$

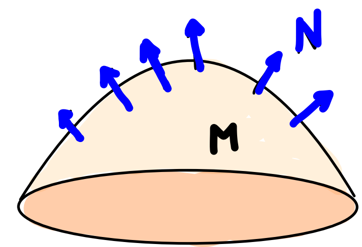
SURFACES EMBEDDED IN $\mathbb{R}^3$

$$(M^2, g) \hookrightarrow (\tilde{M}, \tilde{g}) = (\underbrace{\mathbb{R}^3, \langle\,,\,\rangle}_{\text{espace euclidien}})$$

$$\tilde{R} = 0, \quad \nabla_X (f \partial_{x^j}) = (Xf)\, \partial_{x^j}$$

supposons $\exists\, N \in \Gamma(NM)$
$\|N\| = 1$

(vrai si M orientable,
donc vrai localement)



Application de Gauss

$x \in M$

$$G_x(v) = \tilde{\nabla}_v N$$

G est une endomorphisme (linéaire) $G_x \in \mathrm{End}(T_x M)$

$$\left(\text{car} \quad \langle \tilde{\nabla}_v N, N \rangle = \frac{1}{2} V \underbrace{\|N\|^2}_{\equiv 1} \equiv 0 \right)$$

Courbure de Gauss de (M,g)

$$K_{gauss} : M \to \mathbb{R}, \quad K_{gauss}(x) := \det(G_x)$$

("Théorème remarquable")

Theorema egregium (Gauss, 1827)

K_{gauss} est intrinsèque, i.e. elle ne dépende que de (M, g), et pas du plongement $M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

En fait $K_{gauss}(x) = \underbrace{K}_{\text{courbure sectionnelle}}(T_x M)$

Preuve

Dans un voisinage $U \subset M$ de x on a un repère orthonormé $E_1, E_2 \in \Gamma(TU)$

$$\left(\begin{array}{c} \|E_1\|_g = \|E_2\|_g = 1 \\ g(E_1, E_2) = 0 \end{array} \right)$$

On exprime G_x dans la base E_1, E_2.

$$G_x = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\nabla}_{E_1} N, E_1 \rangle & \langle \tilde{\nabla}_{E_1} N, E_2 \rangle \\ \langle \tilde{\nabla}_{E_2} N, E_1 \rangle & \langle \tilde{\nabla}_{E_2} N, E_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$K_{gauss}(x)$$

$$\shortparallel$$

$$\det(G_x) = \langle \tilde{\nabla}_{E_1} N, E_1 \rangle \langle \tilde{\nabla}_{E_2} N, E_2 \rangle - \langle \tilde{\nabla}_{E_2} N, E_1 \rangle \langle \tilde{\nabla}_{E_1} N, E_2 \rangle$$

$$= \langle N, \mathrm{II}(E_1, E_1) \rangle \langle N, \mathrm{II}(E_2, E_2) \rangle - \langle N, \mathrm{II}(E_2, E_1) \rangle \langle N, \mathrm{II}(E_1, E_2) \rangle$$

$$= \langle \mathrm{II}(E_1,E_1), \mathrm{II}(E_2,E_2)\rangle - \|\mathrm{II}(E_1,E_2)\|^2$$

$$\underset{\tilde{R}=0}{=} g\big(R(E_1,E_2)E_2, E_1\big) = K(T_xM)$$

$\square$

<u>**Rmq**</u> La courbure de Gauss est la seule courbure intrinsèque d'une surface riem..

$$g\big(R(X,Y)Z, W\big) = \underbrace{K}_{\text{courbure Gauss}} \big(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W) \big)$$

$$Ric(X,W) = K\Big(\underbrace{\sum_{i=1,2} g(E_i,E_i)}_{2}\, g(X,W) - \underbrace{\sum_{i=1,2} g(X,E_i)\,g(W,E_i)}_{g(X,W)}\Big)$$

$$= K\, g(X,W)$$

$$S = tr(Ric) = 2K$$

Rmq Toute surface riemannienne est une variété Einstein

Curiosité Toute variété einstein (M^m, g) de dim $m \geq 3$ a courbure scalaire constante

(Faux en dim $m = 2$)

Preuve (M^m, g) Einstein, $\quad Ric = \frac{S}{m} g$

$$\nabla_X Ric = \frac{1}{m}\Big((XS)g + S \underbrace{\nabla_X g}_{0}\Big) = \frac{1}{m}(XS)\, g$$

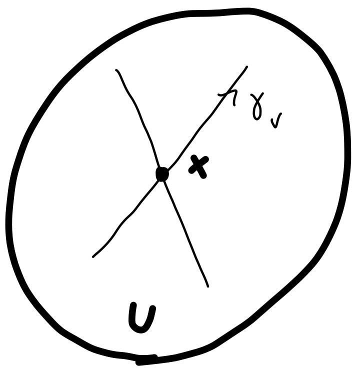
$E_1, \dots, E_m$ repère orthonormale, $\nabla E_i |_x = 0$

$x \in M$ fixé

$E_1(x), \dots, E_m(x)$ base orth de T_xM

$\forall v \in T_xM \quad \|v\|_g = 1$

$\gamma_v(t) = \exp_x(tv)$



$E_i(\gamma_v(t))$ = transp parallèle de $E_i(x)$ le long γ_v

$\nabla_{\gamma_v(t)} E_i \equiv 0$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\Rightarrow$ $\nabla_v E_i = \nabla_{\dot\gamma_v(0)} E_i = 0$

$\forall v \in T_xM, \|v\|_g = 1$

en x.

$$\sum_i (\nabla_{E_i} Ric)(E_j, E_i) = \sum_{i,k} \nabla_{E_i}\Big(g\big(R(E_k, \ \cdot\ ), E_k\big)\Big)(E_j, E_i)$$

$$= \sum_{i,k} g\Big(\big(\nabla_{E_i} R\big)(E_k, E_j) E_i, E_k\Big)$$

$$\underset{\text{2-eme Bianchi}}{=} \sum_{i,k} \Big(- g\Big(\big(\nabla_{E_k} R\big)(E_j, E_i) E_i, E_k\Big) - g\Big(\big(\nabla_{E_j} R\big)(E_i, E_k) E_i, E_k\Big)\Big)$$

$$= \sum_{i,k} \Big(- E_k\, g\big(R(E_j, E_i) E_i, E_k\big) - E_j\, g\big(R(E_i, E_k) E_i, E_k\big)\Big)$$

$$= E_j S - \sum_k E_k\big(\mathrm{Ric}(E_j, E_k)\big)$$

$$\Rightarrow \sum_i \underbrace{E_i\big(\mathrm{Ric}(E_j, E_i)\big)}_{\substack{(\nabla_{E_i}\mathrm{Ric})(E_j, E_i) \\ \| \\ \frac{1}{m}(E_i S)\, g(E_j, E_i)}} = \frac{1}{2} E_j S$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} E_j S = \frac{1}{2} E_j S \quad \Rightarrow$$ si $m \geq 3$, alors $dS \equiv 0$

$\square$