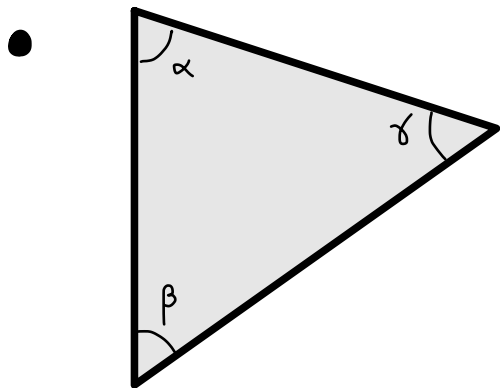
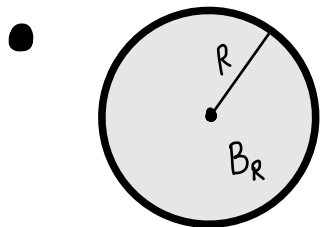


Deux thms de géométrie plane qui on connait.



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

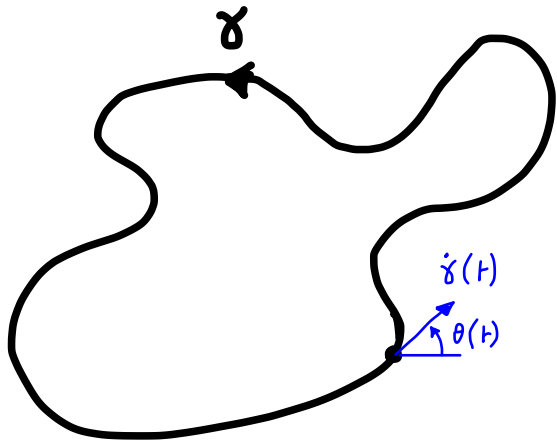


$$\frac{\text{longueur}(\partial B_R)}{R} = 2\pi$$

Le thm de Gauss-Bonnet generalise ces deux énoncés

# HOPF UMLAUFSATZ

(thm de l'angle  
de rotation)



$$\gamma : [a, b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$$

$$\gamma(a) = \gamma(b), \quad \dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$$

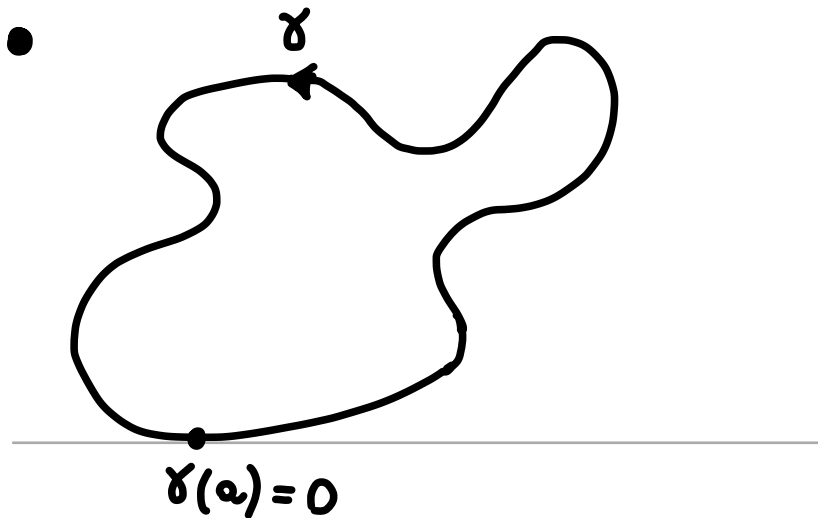
$$\gamma|_{(a, b)} \text{ injective}$$

$$\|\dot{\gamma}\| \equiv 1$$

$$\gamma(t) = e^{i\theta(t)}, \quad \vartheta : [a, b] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$$

Thm (Hopf)  $\theta(b) - \theta(a) = 2\pi$

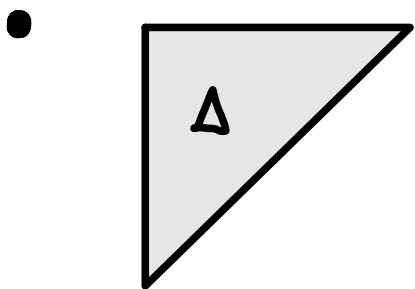
# Preuve



on peut supposer .

$$\gamma(a) = 0$$

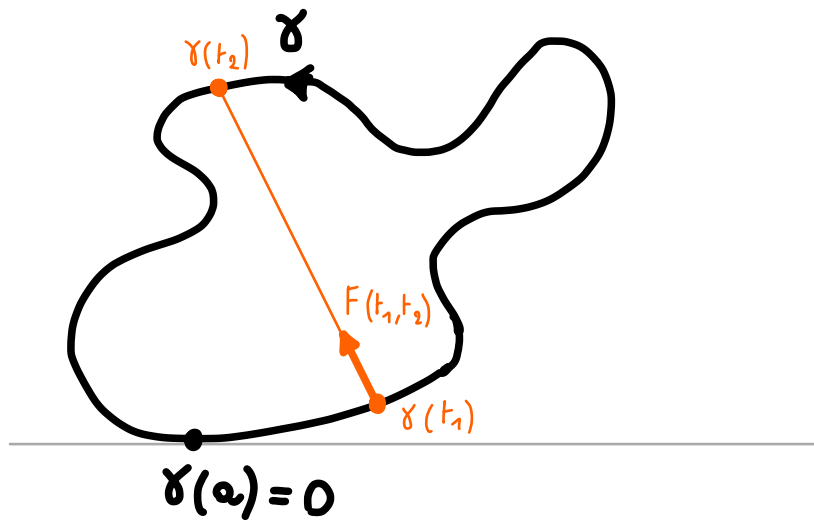
$$\gamma = \mathbb{R} \times [0, \infty)$$

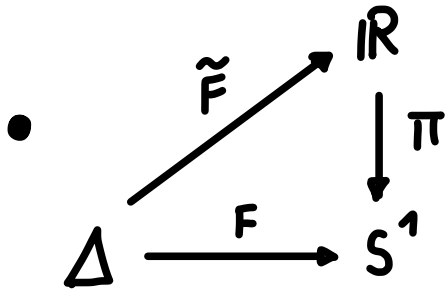


$$\Delta = \{ (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t_1 \leq t_2 \leq b \}$$

- $F: \Delta^C \rightarrow S^1$

$$F(t_1, t_2) = \begin{cases} -\gamma(a), & \wedge t_1 = a, t_2 = b \\ \gamma(t_1), & \wedge t_1 = t_2 \\ \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|'} & \text{autrement} \end{cases}$$





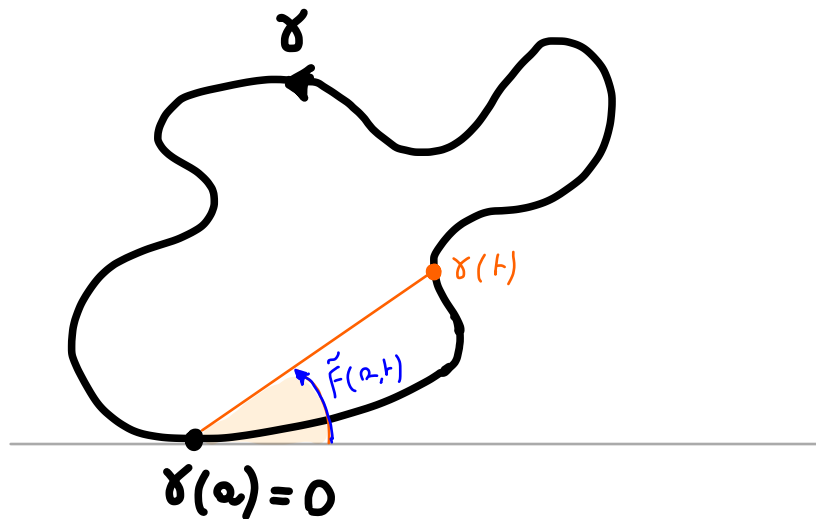
$$\pi(\vartheta) = e^{i\vartheta}$$

$\exists$  relèvement  $\tilde{F} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  de  $F$   
 tq.  $\tilde{F}(a, a) = 0$

(car  $\Delta$  est simplement connexe)

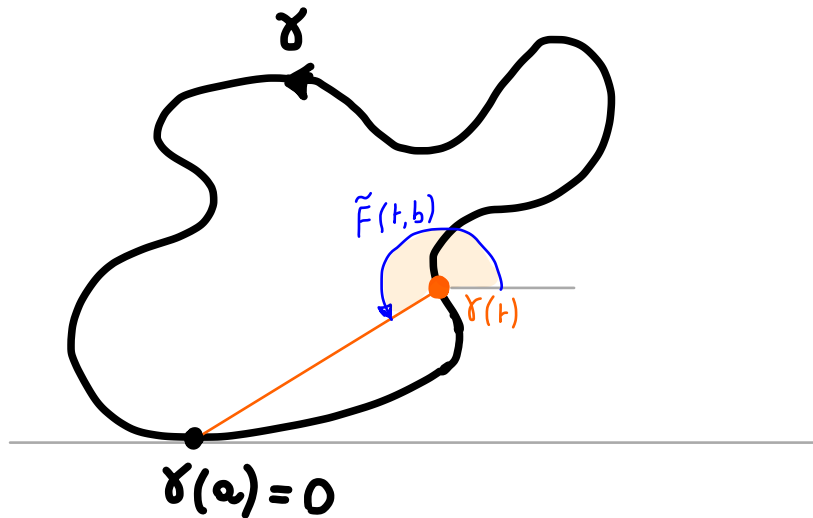
$$\vartheta(t) = \tilde{F}(t, t)$$

- $\tilde{F}(a, t) \in [0, \pi] \quad \forall t \in [a, b]$



- $F(a, a) = -F(a, b) \Rightarrow \tilde{F}(a, b) = \pi$

- $\tilde{F}(t,b) \in [\pi, 2\pi] \quad \forall t \in [a,b]$



- $F(a,b) = -F(b,b) \Rightarrow \tilde{F}(b,b) = 2\pi$   
 $\Rightarrow \vartheta(b) - \vartheta(a) = \tilde{F}(b,b) - \tilde{F}(a,a) = 2\pi$



Supposons  $\gamma$  comme auparavant, sauf que elle est  $C^1$  par morceaux, avec un nombre fini de singularités

$$\gamma [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$$

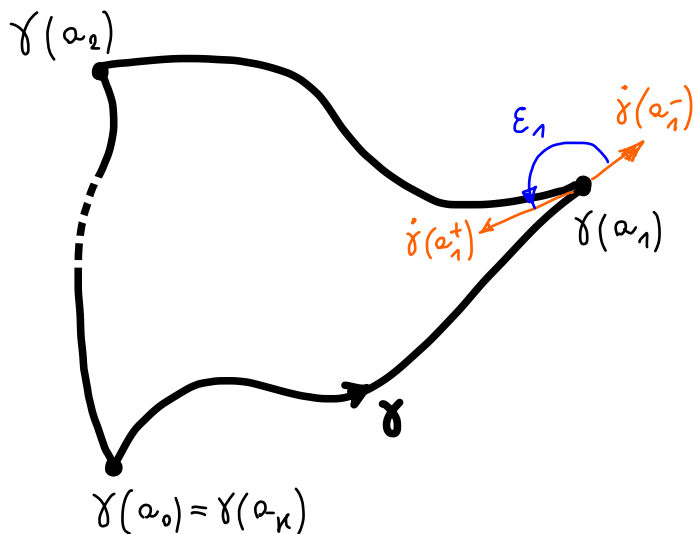
$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$$

$$\dot{\gamma}(t) = e^{i\vartheta(t)} \quad \forall t \in [a, b] \setminus \bigcup_i \{a_i\}$$

$$\vartheta|_{(a_i, a_{i+1})} \in C^0$$

$\varepsilon_i$  := angle orienté de  $\dot{\gamma}(a_i^-)$  à  $\dot{\gamma}(a_i^+)$

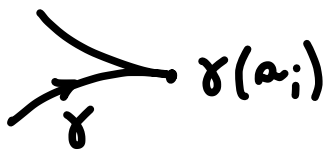
$$\varepsilon_i \in [-\pi, \pi]$$



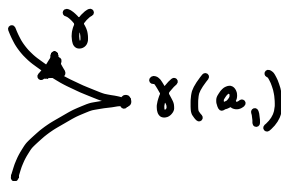




cusps:



$$\epsilon_i = \pi$$



$$\epsilon_i = -\pi$$

angle  
de rotation

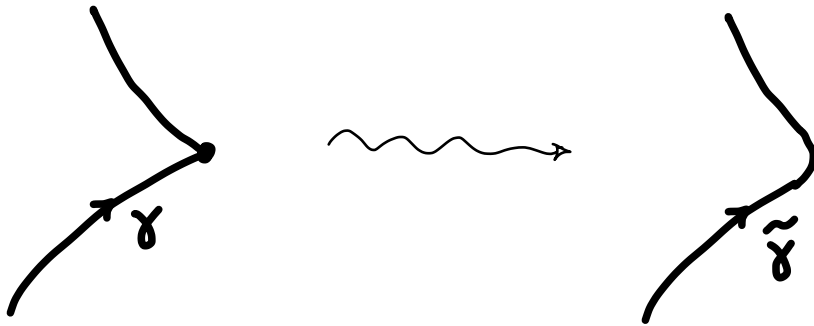
$$\text{Rot}(\gamma) = \sum_{j=0}^{K-1} \left( \theta(a_{j+1}^-) - \theta(a_j^+) + \epsilon_{j+1} \right)$$

$\nearrow$   
 $K \equiv 0$

Thm (Hopf)  $\text{Rot}(\gamma) = 2\pi$

Preuve

Arrondir les coins

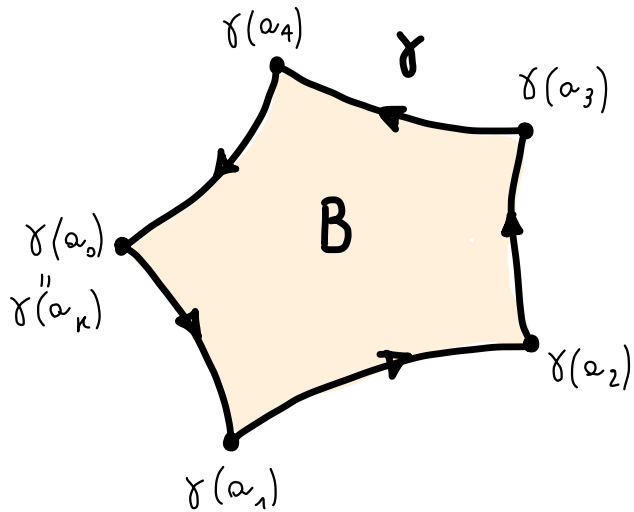


on obtient  $\tilde{\gamma} \in C^1$   
t.q.

$$\text{Rot}(\gamma) = \text{Rot}(\tilde{\gamma}) \\ \parallel \\ 2\pi$$



Le même résultat vaut dans une surface riemannienne orientée  $(M, g)$



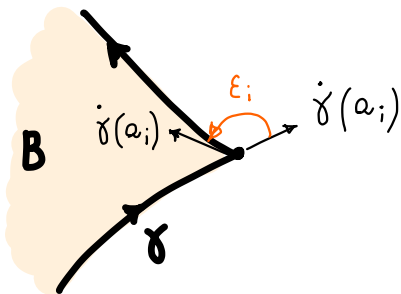
$$\gamma = \underbrace{\partial B}_{\substack{\text{bord} \\ \text{orientée}}} \left( \begin{array}{l} \gamma : [a, b] \rightarrow M \\ a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b \\ \gamma|_{[a, a_{i+1}]} \in C^\infty \end{array} \right)$$

$B$  diffeomorphe à une boule avec bord  $C^\infty$  par morceaux

$x, y$  coordonnées orientées

$$\vartheta : (a_i, a_{i+1}) \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}, \quad g(\dot{\gamma}(t), \frac{\partial}{\partial x}) = \|\dot{\gamma}(t)\|_g \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\|_g \cos(\theta(t))$$

$\varepsilon_i \in [-\pi, \pi]$  angle orienté de  $\dot{\gamma}(a_i^-)$  à  $\dot{\gamma}(a_i^+)$   
 mesuré avec  $g$

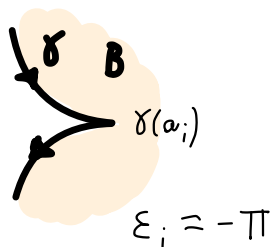
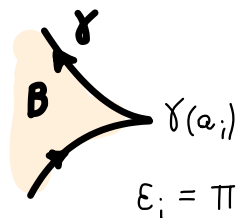


$$g(\dot{\gamma}(a_i^-), \dot{\gamma}(a_i^+)) = \|\dot{\gamma}(a_i^-)\|_g \cdot \|\dot{\gamma}(a_i^+)\|_g \cos(\varepsilon_i)$$

$\pm \varepsilon_i > 0$  si  $\pm \dot{\gamma}(a_i^-), \dot{\gamma}(a_i^+)$  base orientée  
 de  $T_{\dot{\gamma}(a_i)} M$



si  $\dot{\gamma}(a_i^+) = -\dot{\gamma}(a_i^-)$  :



$$\text{Rot}_g(\gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} (\theta(a_{i+1}) - \theta(a_i) + \varepsilon_{i+1})$$

Prop  $\text{Rot}_g(\gamma) = 2\pi K$

### Preuve

- $\text{Rot}_g(\gamma) = 2\pi K$  pour un certain  $K \in \mathbb{Z}$
- $g_0 = dx \otimes dx + dy \otimes dy$  Hopf  $\Rightarrow \text{Rot}_{g_0}(\gamma) = 2\pi$
- $g_\lambda = \lambda g + (1-\lambda)g_0$  métrique riemannienne sur  $B$   
 $\forall \lambda \in [0, 1]$   
 $\lambda \mapsto g_\lambda \in C^\infty$

•  $s \mapsto \text{Rot}_{g_s}(\gamma)$  continuous  
 $\cap$   
 $2\pi\mathbb{Z}$  discrete

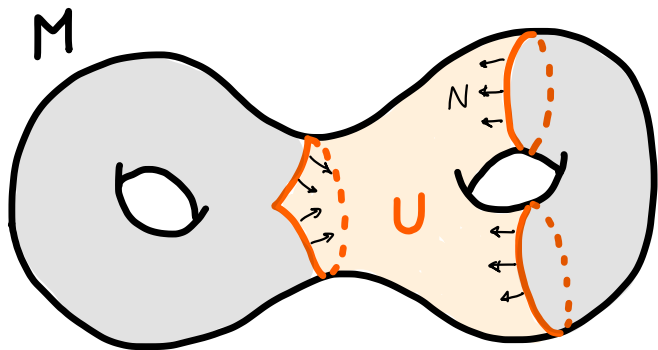
$$\Rightarrow \text{Rot}_{g_0}(\gamma) = \text{Rot}_{g_1}(\gamma)$$

"  $2\pi$



# THM DE GAUSS-BONNET

$(M, g)$  surface riemannienne orientée et compacte



$U \subset M$  ouvert avec  
 $\partial U \in C^\infty$  par morceaux

$\forall x \in$  partie lisse de  $\partial U$

$\underbrace{N(x)}_{\text{pointe vers l'intérieur de } U} \perp_g T_x(\partial U), \quad \|N(x)\|_g \equiv 1$

$\gamma \subset \partial U$  composante connexe

on paramétrise  $\gamma: [0, \ell] \rightarrow M$  tq.  $\|\dot{\gamma}\|_g \equiv 1$

$\dot{\gamma}(t), N(\dot{\gamma}(t))$  base orientée de  $T_{\dot{\gamma}(t)}M$

$N(t) := N(\gamma(t))$  normale le long de  $\gamma$  qui pointe dans  $U$

courbure  
signée

$$K_N(t) = g(\nabla_t \gamma, N(t))$$

Rmq

$$\nabla_t \gamma = K_N(t) N(t)$$

$$\left( \text{car } g(\nabla_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}(t)\|_g^2 = 0 \right)$$

donc  $\gamma$  est une géodésiquessi  $K_N \equiv 0$

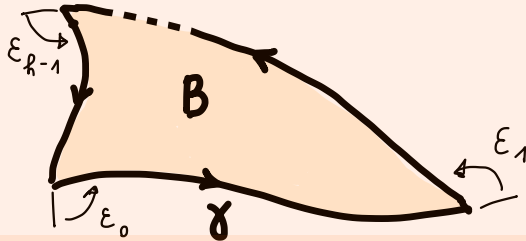


# Thm (Formule de Gauss-Bonnet)

$(M, g)$  surface riemannienne orientée

$\forall$  boule compacte  $B \subset M$  avec bord orienté  $\gamma = \partial B$   
avec angles  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{R-1} \in [-\pi, \pi]$

$C^\infty$  par morceaux



Alors

$$\int_M K_g \text{vol}_g + \int_0^l K_N(t) dt + \sum_{i=0}^{R-1} \varepsilon_i = 2\pi$$

# Preuve

- $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{R-1} = \ell$  et  $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]} \in C^\infty$

$x, y$  coordonnées orientées sur  $B$

$\vartheta(a_i, a_{i+1}) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$  angle entre  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\dot{\gamma}(t)$

On sait que

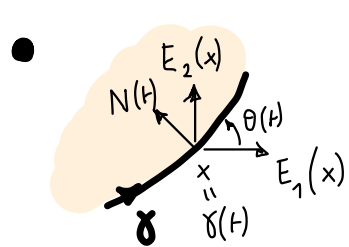
$$2\pi = \text{Rot}_g(\gamma) = \sum_{i=0}^{R-1} \left( \varepsilon_i + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \dot{\vartheta}(t) dt \right)$$

- repère orthonormale.

$$E_1 = \frac{\partial_x}{\|\partial_x\|_g}, \quad E_2 \text{ normale positif à } E_1$$

$$\text{i.e. } \|E_1\|_g = \|E_2\|_g \equiv 1, \quad g(E_1, E_2) \equiv 0$$

$E_1(x), E_2(x)$  base orientée de  $T_x M$ ,  $\forall x \in \bar{B}$



$$\gamma(t) = \cos \theta(t) E_1(\gamma(t)) + \sin \theta(t) E_2(\gamma(t))$$

$$N(t) = -\sin \theta(t) E_1(\gamma(t)) + \cos \theta(t) E_2(\gamma(t))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla_t \gamma &= \dot{\theta} (-\sin \theta E_1 + \cos \theta E_2) + \cos \theta \nabla_t E_1 + \sin \theta \nabla_t E_2 \\ &= \dot{\theta} N + \cos \theta \nabla_t E_1 + \sin \theta \nabla_t E_2 \end{aligned}$$

- On définit une 1-forme  $\omega$  sur  $\bar{B}$

$$\omega(X) := -g(\nabla_X E_1, E_2) = g(E_1, \nabla_X E_2)$$

$$0 = X g(E_1, E_2) = g(\nabla_X E_1, E_2) + g(E_1, \nabla_X E_2)$$

Comme  $0 = X \|E_i\|_g^2 = 2 g(\nabla_X E_i, E_i)$

on a

$$\nabla_X E_1 = -\omega(X) E_2$$

$$\nabla_X E_2 = \omega(X) E_1$$

- Calculons la courbure de  $\gamma$ .

$$\begin{aligned}
 K_N(t) &= g(\nabla_t \dot{\gamma}, N(t)) = \dot{\theta} g(N, N) + \cos \theta g(\nabla_{\dot{\gamma}} E_1, N) \\
 &\quad + \sin \theta g(\nabla_{\dot{\gamma}} E_2, N) \\
 &= \dot{\theta} - \underbrace{\cos \theta \omega(\dot{\gamma}) g(E_2, N)}_{\cos \theta} + \underbrace{\sin \theta \omega(\dot{\gamma}) g(E_1, N)}_{-\sin \theta} \\
 &= \dot{\theta} - \omega(\dot{\gamma})
 \end{aligned}$$

On l'insère dans la formule

$$2\pi = \text{Rot}_g(\gamma) = \sum_{i=0}^{R-1} \left( \varepsilon_i + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \dot{\theta}(t) dt \right)$$

On obtient

$$2\pi = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i + \int_0^l K_N(t) dt + \underbrace{\int_0^l \omega(\gamma(t)) dt}$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_B d\omega$$

↑  
Stokes

Il reste à prouver que  $d\omega = K_g \text{vol}_g$

$$K_g \text{ vol}_g(E_1, E_2) = K_g = g(R(E_1, E_2)E_2, E_1)$$

$$= g(\underbrace{\nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2}_{\omega(E_2)E_1} - \underbrace{\nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2}_{\omega(E_1)E_1} - \underbrace{\nabla_{[E_1, E_2]} E_2}_{\omega([E_1, E_2])E_1}, E_1)$$

$$= g(E_1(\omega(E_2)) E_1 + \omega(E_2) \nabla_{E_1} E_1 - \dots, E_1)$$

$$= E_1 \omega(E_2) - E_2 \omega(E_1) - \omega([E_1, E_2])$$

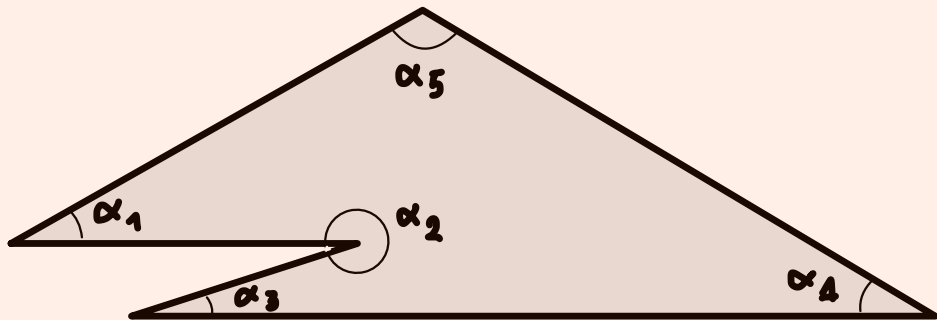
$$g(\nabla_x E_1, E_1) = 0$$

$$= d\omega(E_1, E_2)$$



Cor

$\forall$   $m$ -gone dans le plan euclidien  
avec angles internes  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$



$$\text{On a } \alpha_1 + \dots + \alpha_m = (m-2)\pi$$

Preuve

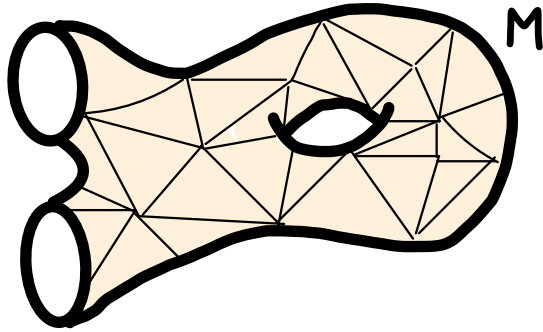
Par formule de Gauss-Bonnet,

$$K_g \equiv 0, \quad K_N \equiv 0, \quad \alpha_i = \pi - \varepsilon_i$$

□



# SURFACES ORIENTÉE TRIANGULÉES



Une **triangulation** d'une surface compacte à bord  $M$  est une décomposition  $M = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ , où  $\Delta_i$  est un triangle compacte plongé dans  $M$ , et

$$\Delta_i \cap \Delta_j = \begin{cases} \emptyset, \text{ ou} \\ \text{un sommet, ou} \\ \text{une arête} \end{cases} \quad \forall i \neq j$$

Rmq Le bord  $\partial M$  est union d'arêtes

Thm (Radó, 1925)

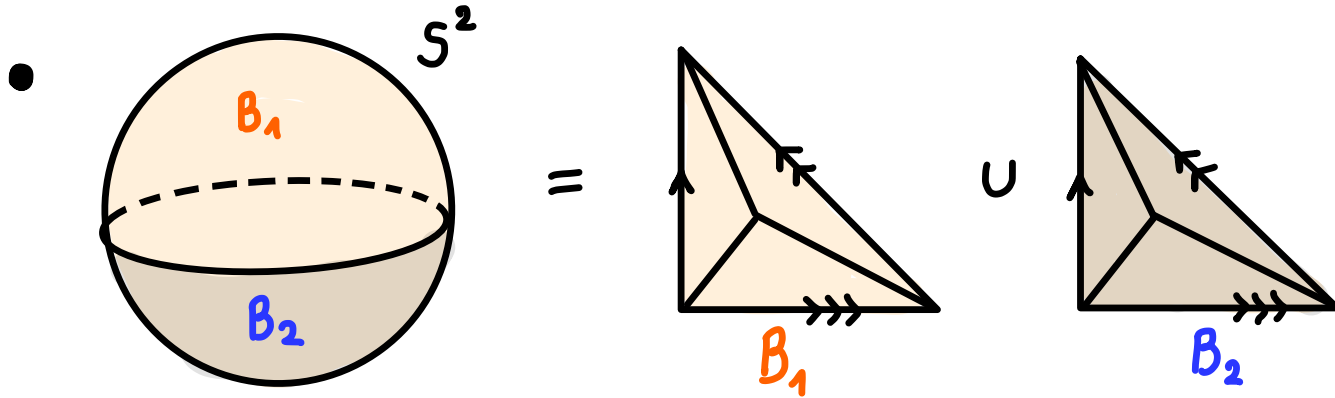
Toute surface compacte (avec ou sans bord)  
admet une triangulation

Caractéristique  
d'Euler

$$\chi(M) = \# \text{ sommets} - \# \text{ arêtes} + \# \text{ faces}$$

Thm  $\chi(M)$  est indépendant de la triangulation

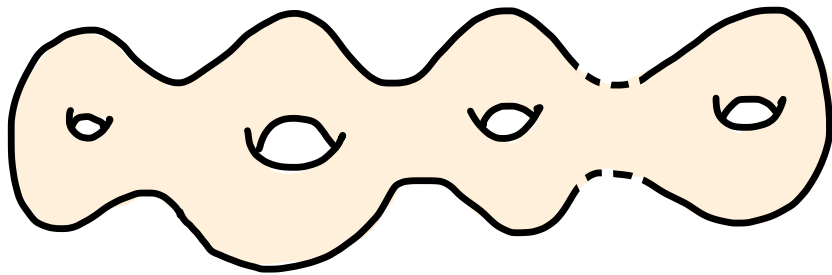
# exemples



$$\chi(S^2) = 5 - 9 + 6 = 2$$

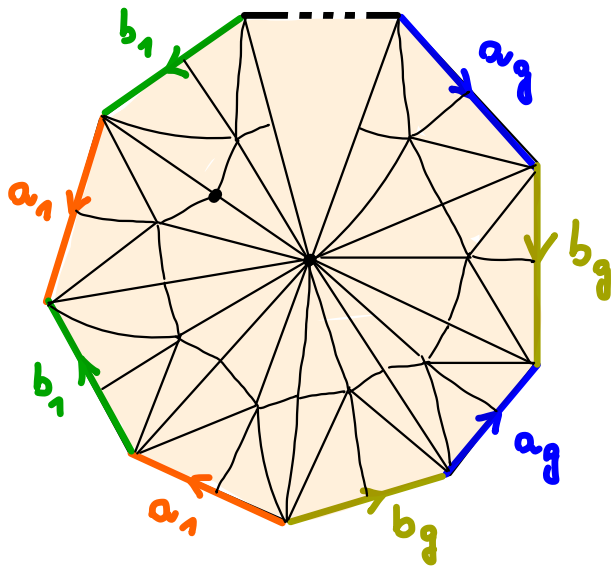
sommets      arêtes      faces

- $\Sigma_g =$  surface fermée orientable de genre  $g > 0$



( $g$  "trous")

112



$$\chi(\Sigma_g) = \underbrace{2 + 4g + \frac{5 \cdot 4g}{2}}_{\text{sommets}} - \underbrace{\left(4g \cdot 6 + \frac{4g \cdot 6}{2}\right)}_{\text{arêtes}} + \underbrace{4g \cdot 6}_{\text{faces}}$$

$$= 2 - 2g$$

exercice

Calculer

$$\chi(\Sigma_{g,b})$$

surface compact orientée  
de genre  $g$  et avec  
 $b$  composantes de bord

## Thm (Gauss-Bonnet)

Pour toute surface riemannienne orientée fermée  $(M, g)$ , on a

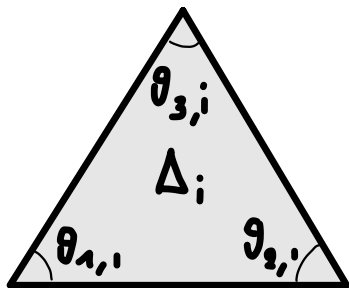
$$\frac{1}{2\pi} \int_M K_g \operatorname{vol}_g = \chi(M)$$

## Preuve

$M$  admet une triangulation  $M = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_f$

$f = \#$  faces

$$a = \# \text{ arêtes} = \frac{3}{2} f \quad \left( \text{car chaque arête est} \right. \\ \left. \text{partagée par deux faces} \right)$$



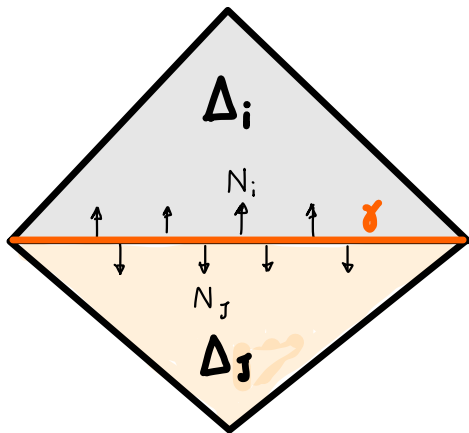
$$\sum_{i=1}^f (\theta_{1,i} + \theta_{2,i} + \theta_{3,i}) = 2\pi \Lambda$$

où  $\Lambda = \# \text{ sommets}$

$$\int_M K_g \text{vol}_g = \sum_{i=1}^f \int_{\Delta_i} K_g \text{vol}_g$$

Gauss-Bonnet  $\rightarrow$

$$= \sum_{i=1}^f \left( \underbrace{- \int_{\partial \Delta_i} K_{N_i}(h) dt}_{\text{abuse de notation}} - (\pi - \theta_{1,i}) - (\pi - \theta_{2,i}) - (\pi - \theta_{3,i}) + 2\pi \right)$$



$$\int_{\gamma} \underbrace{K_{N_i}(t) dt}_{g(\nabla_t \dot{\gamma}, N_i(t))} = - \int_{\gamma} \underbrace{K_{N_j}(t) dt}_{g(\nabla_t \dot{\gamma}, N_j(t))}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \int_{\partial \Delta_i} K_{N_i}(t) dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_M K_g \text{vol}_g = 2\pi \chi - \underbrace{3\pi \rho}_{2\pi \alpha} + 2\pi \rho = 2\pi \chi(M) \quad \square$$



Cor  $(M, g)$  surface riem orientée et fermée

Si  $K_g \equiv 0$  alors  $\chi(M) = 0$ , donc  $M = \mathbb{T}^2$

Si  $K_g \geq 0$  et pas  $\equiv 0$ , alors  $\chi(M) > 0$ , donc  $M = S^2$

Si  $K_g \leq 0$  et pas  $\equiv 0$ , alors  $\chi(M) < 0$ , donc  $M = \Sigma_g$   
 $g \geq 2$

exercice

$$\int_M K_g \text{vol}_g = ?$$

pour  $(M, g)$  surface  
orientée, compacte, avec  
 $\partial M \ C^\infty$  par morceaux