Géométrie différentielle 2020-2021

Corrigé du TD1/2

1 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit l'ouvert $U_x = \{[y] \mid x \in]x - 1/2\}, x + 1/2\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$, de sorte que les U_x recouvrent S^1 et que la projection $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induit un difféomorphisme π_x de $]x1/2, x + 1/2[$ sur U_x, et un difféomorphisme φ_x de $]x1/2, x + 1/2[\times\mathbb{R}$ sur $\pi^{\{} - 1\}(U_x)$. (En fait, il suffit de considérer U_0 et $U_{1/2}$ qui recouvrent déjà S^1.

On définit alors $\Phi_x = (\pi \circ \{\text{pr}\}_2) \circ \varphi_{\text{x}}^{-1}$ qui est un difféomorphisme de $\pi^{\{} - 1\}(U_x)$ sur $U_x \times \mathbb{R}$. Explicitement :

$$\Phi_x([y], \tau([y, u]) = u \text{ où } y \in]x - 1/2, x + 1/2[.$$

Le fait qu'on impose $y \in]x - 1/2, x + 1/2[$ fait que u est bien défini.

Ce difféomorphisme Φ_x envoie $\{[y]\} \times \mathbb{R}$ sur la fibre $M_{[y]}$, et est linéaire en la seconde variable, donc c'est une trivialisation, donc M est un fibré de rang 1.

b) Trois preuves possibles :

1) Si π était trivial, M serait orientable, ce qui n'est pas.

Preuve que M n'est pas orientable. Si M était orientable, on pourrait la munir d'une orientation et relever celle-ci à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Notant p la projection de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur M et

$$\psi(x, u) = (x + 1, -u)$$

qui est un difféomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a $p \circ \psi = p$. Comme p préserve l'orientation [envoie l'orientation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur l'orientation de M], φ préserve l'orientation : c'est impossible puisque $\text{Jac}(\psi) = -1 < 0$.

Comme je n'ai pas défini l'orientation des variétés dans le cours de Géométrie avancé, ceci est peut-être un peu difficile à comprendre. Une preuve plus claire résulte du fait qu'une varit est orientable si et seulement si elle a une forme volume = forme de degré maximal qui ne s'annule jamais.

Si M avait une telle forme ν, la forme $\widehat{\nu} = p^*\nu$ serait une forme volume sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc $\widehat{\nu} = f dx \wedge du$ avec $f > 0$. Puisque $p \circ \psi = p$, $p^*\widehat{\nu} = \widehat{\nu}$. Puisque $\psi^*(dx \wedge du) = -dx \wedge du$, on a $(f \circ \psi) = -f$, donc f change de signe, donc elle s'annule quelque part, contradiction.

2) Si π était trivial, M serait difféomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$, la section nulle $\{\mathcal{O}\}_{\mathcal{M}}$ (âme du ruban) étant envoyée sur $S^1 \times \{0\}$. Donc $\{\mathcal{O}\}_{\mathcal{M}}$ disconnecterait M, ce qui n'est pas le cas (les deux composantes connexes de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ sont chacune envoyées sur $M \setminus \{\mathcal{O}\}_{\mathcal{M}}$).

3) (la preuve à laquelle je pensais, finalement pas la plus efficace). Si π était trivial, soit $\Phi = \pi \times \tau$ une trivialisation de π (on appelle aussi τ trivialisation). En posant $\widehat{\tau} = \tau \circ p$, on obtient une application de M dans $\mathbb{R}$ elle que $\widehat{\tau} \circ \psi = \tau \circ p \circ \psi = \widehat{\tau}$. De plus, $u \mapsto \widehat{\tau}(x, u)$ est linéaire, donc de la forme $a(x)u$ avec $a \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$. Donc

$$\widehat{\tau}(x + 1, -u) = a(x + 1)(-u) = \widehat{\psi}(x, u) = a(x)u,$$

soit $a(x + 1) = -a(x)$, donc a change de signe, donc elle s'annule, contradiction.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On veut classer les fibrés de rang r sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ou sur S^1).

c) (Noter que U_1 = le $U_{1/2}$ ci-dessus). L'existence de τ_0, τ_1 résulte du cours et du fait que U_0, U_1 sont difféomorphes à $]0, 1[$ donc contractiles.

d) On rappelle que $\text{GL}(r, \mathbb{R})$ a deux composantes $\text{GL}^{\pm}(r, \mathbb{R})$, données par le signe du déterminant. Il s'agitt donc de prouver que E est trivial si et seulement si $\det(g)$ garde un signe constant.

Par définition, E est trivial si et seulement s'il existe $\tau : E \to \mathbb{R}^r$ isomorphisme linéaire sur chaque fibre. Une telle application a la forme

$$\tau_{|U_0} = (g_0 \circ \pi) \circ \tau_0 \ , \ \tau_{\{}U_1\} = (g_1 \circ \pi) \circ \tau_1 \ , \ g_i \in C^\infty(U_i, \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})).$$

Donc τ existe si et seulement s'il existe $g_i \in C^\infty(U_i, \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}))$, $i = 0, 1$ telle que sur $\pi^{-1}(U_0 \cap U_1)$ on a

$$(g_0 \circ \pi)\tau_0 = (g_1 \circ \pi)\tau_1 = (g_1 \circ \pi)(g \circ \pi \circ \tau_0).$$

$g_0 = g_1 g^{\{} - 1\}$ sur $U_0 \cap U_1$. Donc E est trivial si et seulement si g s'écrit sous la forme

$$g = g_1^{-1} g_0$$

avec g_i lisse sur U_i («le cocycle $(g_{\{}i, j\})$ est un cobord»).

Condition nécessaire : puisque U_i est connexe, $\det(g_i)$ garde un signe constant, donc $\det(g)$ aussi

Condition suffisante : posons $g_0 = \mathrm{I}_r$ (constante), il s'agit de prolonger g de $U_0 \cap U_1$ à U_1. Or $(U_1, U_0 \cap U_1)$ est difféomorphe à $(]0, 1[,]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$ et g est à valeurs dans $\mathrm{GL}_+(r, \mathbb{R})$ qui est une variété connexe.

On voit qu'avec ce choix de U_0, U_1 il y aura un problème en $1/2$. Donc on les remplace par

$$U_0 = p(]1/6, 5/6[) \ , \ U_1 = p(] - 1/3, 1/3[).$$

De plus g est définie et lisse sur un voisinage de $\overline{U_0 \cap U_1}$ dans U_1 qui correspond à $]0, 1/3\varepsilon[\cup]]2/3 + \varepsilon, 1[$. Donc l'application $g_{\{}|U_0 \cap 1\}$ se prolonge bien de façon lisse en une application g_1 définie sur U_1.

On a utilisé la propriété suivante : si M est connexe, elle est connexe par chemins lisses. Mieux : si $p_0, p_1 \in M$ et $\gamma_1 : [0, \varepsilon[\to M$, $\gamma_2 :]1 - \varepsilon, 1] \to M$ sont des chemins lisses tels que $\gamma_1(0) = p_0$ et $\gamma_2(1) = p_1$, il existe $[0, 1] \to M$ chemin lisse de p_0 à p_1 tel que $\gamma = \gamma_i$ près de i.

e) Il suffit de poser $E = M \oplus \mathbb{R}^{\{}r - 1\}$ où M est le fibré de Möbius.

f) Si p_0, p_1 sont deux points antipodaux, on pose $U_i = S^k \setminus \{\subset\}$. Alors U_i est difféomorphe à $\mathbb{R}^k$, par exemple par projection stéréographique, et $U_0 \cap U_1$ est difféomorphe à $S^{k-1} \times] - 1, 1[$, par exemple via

$$\varphi(x_1, \cdots, x_{k+1}) = \big(\frac{(x_1, \cdots, x_k)}{(1 - x_{k+1}^2)^{1/2}}, x_{k+1}\big).$$

Comme U_i est contractile, il existe une trivialisation $\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^r$ et l'on définit $g : U_0 \cap U_1 \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ par $\tau_1 = (g \circ \pi) \circ \tau_0$.

g)* De même qu'en d), E est trivial si et seulement s'il existe $g_i \in C^\infty(U_i, \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}))$, $i = 0, 1$ telles que sur $\pi^{-1}(U_0 \cap U_1)$ on a $g_1 = g_0 g$ sur $U_0 \cap U_1$. En fait, comme en d) il vaut mieux remplacer U_0, U_1 par

$$U_0 = \{(x_1, \cdots, x_{k+1}) \in S^k \mid x_{k+1} < 1/2\} \ , \ U_1 = \{(x_1, \cdots, x_{k+1})\} \in S^k \mid x_{k+1} > -1/2\},$$

de façon à avoir $U_i \approx \mathbb{R}^k$ et qu'il existe un difféomorphisme

$$\varphi : (U_1, U_0 \cap U_1) \approx (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus D^k) \ , \ \varphi(x, 0) = x \ \{\text{sur}\} \ \mathrm{S^{k-1}} \times \{0\},$$

où D^k est le disque unité fermé.

De plus, si τ existe on peut lui imposeGrr de coïncider avec τ_0 sur $\pi^{-1}(U_0)$ par une construction d'interpolation. Donc on peut imposer $g_0 = \mathrm{I}_r$, et l'on a

$$E \text{ trivial } \Leftrightarrow g \text{ s'étend de façon lisse à } U_1.$$

Ou encore

$$E \text{ trivial } \Leftrightarrow g\circ\Phi^{-1} \text{ s'étend de façon lisse à } D^k.$$

Puisque $g\circ\Phi^{-1}$ s'étend à un voisinage de S^{k-1}, en identifiant $S^{k-1}\times\{0\}=S^{k-1}$, ceci équivaut au fait que $g : S^{k-1}\to \mathrm{GL}_+(r,\mathbb{R})$ est homotope à zéro, soit $[g]=0$ dans $\pi_{k-1}(\mathrm{GL}_+(r,\mathbb{R}))$.

Remarques. 1) En travaillant un peu plus, on montre que les classes d'isomorphisme de r-fibrés sur S^{k-1} sont en bijection avec $\pi_{k-1}(\mathrm{GL}_+(r,\mathbb{R}))$.

2) Les groupes d'homotopie supérieurs $\pi_n(X), n\geq 2$, sont définis pour X connexe par arcs : $\pi_n(X)=[S^n,X]$ ensemble des classes d'homotopie de S^n vers X. On peut aussi l'identifier à $[S^n,D_+;X,\{x_0\}]$ce qui permet de définir une structure de groupe abélien par concaténation. Noter que si $X=G$ groupe topologique, la multiplication dans $\pi_n(G)$ est aussi définie par multiplication dans G. Et que si $n=1$, $\pi_1(G)$ est toujours abélien. Donc les r-fibrés sur S^k ont une structure de groupe abélien (si$r>0$, $k\geq 1$ et aussi $k=0$: groupe trivial).

3) Puisque $\mathrm{GL}_+(r,\mathbb{R})\simeq \mathrm{SO}(r)$, on a $\pi_n\mathrm{GL}_+(r,\mathbb{R})=\pi_n\mathrm{SO}(r)$. Ce dernier peut se ramener aux groupes d'homotopie des sphères $\pi_i(S^m)$ via la fibration localement triviale $\mathrm{SO}(r-1)\to\mathrm{SO}(r)\to S^{r-1}$ et la suite exacte longue qu'elle induit :

$$\cdots\to\pi_n(\mathrm{SO}(r-1))\to\pi_n(\mathrm{SO}(r))\to\pi_n(S^{r-1})\to\pi_{n-1}(\mathrm{SO}(r-1))\to\cdots$$

Exemples en petites dimensions :

• $\mathrm{SO}(2)=S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$,donc $\pi 1(\mathrm{SO}(2)))=Z, \pi_n(S_1)=0$ si $n\geq 2$

• $\mathrm{SO}(3)=S^3/\{\pm \mathrm{I}_3\}$, et aussi $\pi_n(\mathrm{SO}(3))=\pi_{\{}n-1\}(S^2)$, donc $\pi_1(\mathrm{SO}(3))=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\pi_2(\mathrm{SO}(3))=0$ (plus généralement, $\pi_2(G)=0$ pour tout groupe de Lie connexe), $\pi_3(\mathrm{SO}(3))=\pi_3(S^3)=\pi_3(S_2)=\mathbb{Z}$, $\pi_4(\mathrm{SO}(3))=\pi_4(S^3)=\pi_4(S^2)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

• $\mathrm{SO}(4)/\{\pm\mathrm{I}_4\}=\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)$ via l'action sur $\Lambda^2_+(\mathbb{R}^4)\oplus\Lambda^2_-(\mathbb{R}^4)$, donc $\pi_1(\mathrm{SO}(4))=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\pi_n(\mathrm{SO}(4))=\pi_n(S^2)\times\pi_n(S^2)$ pour $n\geq 2$ Toutefois, déjà le calcul de $\pi_{1000}(S^2)$ est je crois infaisable aujourd'hui...

2 a) L'application

$$\varphi_P\times(\mathrm{pr}_P\times \mathrm{p}_{P^\perp}) : U_P\times\mathbb{R}^r\to L(P,P^\perp)\times(P\times P^\perp)$$

est un difféomorphisme qui envoie $E_{r,m}\cap(U_P\times\mathbb{R}^r)$ sur

$$\{u,(x,y)\mid y=u(x)\}.$$

L'image est un graphe lisse sur $L(P,P^\perp)\times P$, donc $E_{r,m}$ est une sous-variété de $\mathrm{Gr}(r,m)\times\mathbb{R}^r$ de dimension

$$\dim((L(P,P^\perp)\times P))=r(m-r)+r.$$

b) L'application π est clairement une submersion, ses fibres sont munies d'une structure linéaire de dimension r. Sur $\pi^{-1}(U_P)$, on pose $\tau_P(P,x)=x\in P\approx\mathbb{R}^r$: c'est une application lisse qui est linéaire bijective sur les fibres, donc une trivialisation. Donc $E_(r,m)$ est un fibré vectoriel de rang r sur $\mathrm{Gr}(r,m)$.

c) On a

$$f^*E_{r,m}=\{(x,P,v)\in B\times E_(r,m)\mid f(x)=P\}=\{(x,P,v)\in B\times\mathrm{Gr}(r,m)\times\mathbb{R}^r\mid f(x)=Petv\in f(x)\},$$

d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_f & \xrightarrow{F} & f^*E_{r,m} \\ \pi_f\big\downarrow & & \big\downarrow f^*\pi_{r,m} \\ B & \xrightarrow{\mathrm{Id}_B} & \mathrm{Gr}(r,m), \end{array}$$

avec $F(x,v) = (x, f(x), v)$. Comme F est un difféomorphisme qui est linéaire sur les fibres, $E_f f$ est un fibré vectoriel sur B et F un isomorphisme de E_f sur $f^*E_{r,m}$.

d) Pour $x \in B$, on pose

$$T(e) = (\chi_1(\pi(e))\tau_1(e), \cdots, \chi_k(\pi(e))\tau_k(e)).$$

C'est bien défini et lisse car $\chi_i(\pi(e)) = 0$ si $\pi(e) \in U_i$. La restriction à E_x est linéaire puisque les τ_i le sont. De plus, tout $x \in B$ est dans un U_i, donc $\chi_i(x) = 1$. Comme τ_i est injectif sur E_x, T est aussi injectif sur E_x.

e) Pour montrer que f est lisse, on se restreint à $E_{|U}$ muni d'une trivialisation τ. Alors

$$f \circ (\pi \times \tau)^{-1}(x,v) = (\chi_1(x)A_1(x)v, \cdots, \chi_k(x)A_k(x)v)\ ,\ A_i \in C^\infty(U, \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})).$$

Ceci est de la forme $g(x,v) = A(x)v$, $A \in C^\infty(U, \mathrm{Lininj}(r,m))$, où $\mathrm{Lininj}(r,m)) \subset L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^m)$ est l'ouvert des injections linéaires de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}^m$. Or l'application

$$p : \mathrm{Lininj}(r,m) \to \mathrm{Gr}(r,m)\ ,\ p(A) = A(\mathbb{R}^r \times \{0\})$$

est lisse puisque $p^{-1}(U_P)$ est ouvert et

$$\varphi_p \circ p(A) = \pi_{A(\mathbb{R}^r \times \{0\})^\perp} \circ \pi_{A(\mathbb{R}^r \times \{0\})}.$$

Remarque. On a un isomorphisme entre $\mathrm{Lininj}(r,m)$ et la variété de Stiefel

$$\mathrm{St}(r,m) = \{(v_1, \cdots, v_r) \in (\mathbb{R}^m)^r \mid v_1, \cdots, v_r \text{ sont linéairement indépendants}\},$$

et une fibration localement triviale canonique $\mathrm{S}(tr,m) \to \mathrm{Gr}(r,m)$, de fibre $\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$. On obtient l'isomorphisme demandé $\varphi : E \to E_f$ en posant

$$\varphi(e) = (\pi(e), f(e)).$$

En effet, φ est clairement bijective. De plus, π est une submersion et $f_{|E_x}$ est un isomorphisme linéaire, donc φ est un difféomorphisme linéaire sur les fibres.

4. a) Supposons que $(\varphi_i)_*X(b,v) = (\xi_i(x), A_i(b)v)$ où les $\varphi_i = \pi \times \tau_i$ sont des trivialisations sur un recouvrement ouvert (U_i). Si $\varphi = \pi \times \tau$ est une trivialisation sur U, on a $\tau = (g \circ \pi)\tau_i$ sur $U \cap U_i$, donc

$$\varphi_* X(x,v) = (\xi(x), g(x)A_i(x)v).$$

b) Ceci résulte du fait que la projection de $\varphi_* X(b,v)$ sur T_bB est $\xi(b)$, indépendante de v.

c) On recouvre B par un atlas trivialisant (U_i, φ_i) et on prend (χ_i) une partition de l'unité subordonnée, puis l'on pose

$$X = \sum_i \chi_i (\varphi_i)_*^{-1}(\xi, 0).$$

d) Via les trivialisations, il s'agit de montrer que si $X \in \mathcal{X}(U \times \mathbb{R}^r)$, $X(b,v)$ est de la forme $(\xi(b), A(x)v)$ si et seulement si $\varphi_X)t(b_0,v_0)$ est de la forme $(\varphi_\xi^t(b_0), U(t)v_0)$ où $U(t) \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$. Dans le sens «si» : l'équation associée est

$$\dot{b} = \xi(b)\ ,\ \dot{v} = A(b)v,$$

,qui a pour solution $(\varphi_\xi^t(b), v(t,b_0,v_0))$ avec v solution de $\dot{v} = A(\varphi_\xi(b_0))v$. Comme cette dernère équation est linéaire, $v(t)$ est de la forme $U(t)v_0$.

Dans le sens «seulement si» : en dérivant $\varphi_X^t(b_0, v_0) = \varphi_\xi^t(b0), U(t)v_0)$ en $t = 0$, il vient $X(b_0, v_0) = (\xi(b_0), \dot{U}(0)v_0)$. Puisque $\dot{U}(0)$ est linéaire, c'est bien de la forme voulue.

e) En se restreignant à $[t_0 - \varepsilon, t_0]$, on peut supposer que E est trivial, $E = B \times \mathbb{R}^r$. On a alors

$$X(b, v) = (\xi(b), A(x)v), \varphi_X^t(b_0, v_0) = (\varphi_\xi^t(b_0), v(t)),$$

où $t \mapsto v(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire $\dot{v} = A(\varphi_X^t(b_0))v$: comme cette équation est définie sur $[0, t_0]$, v est aussi définie sur $[0, t_0]$.

f) Les orbites de $\dfrac{\partial}{\partial t}$ issues de $\{0\} \times B$ pour $t = 0$ arrivent toutes à $\{1\} \times B$ en $t = 1$. Comme X se projette sur $\dfrac{\partial}{\partial t}$, d'apr'es e) ses orbites issues de $\pi^{-1}(\{0\} \times B)$ pour $t = 0$ arrivent toutes à \$$\pi^{-1}(\{1\} \times B)$ en $t = 1$. De même de 1 à 0. Donc φ_X^1 est un difféomorphisme de $\pi^{-1}(\{0\} \times B)$ sur $\pi^{-1}(\{1\} \times B)$. D'apr'es d), il est linéaire sur les fibres, donc un isomorphisme. Enfin, $\pi^{-1}(\{t\} \times B) \to \{t\} \times B$ est isomorphe à $i_t^* E \to B$, cqfd.