Géométrie différentielle 2020-2021

TD3, mercredi 3 février

1 On donne une autre définition d'un champ de vecteurs linéaire sur un fibré vectoriel $\pi : E \to B$ (cf. TD 1) : c'est un champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(E) = \Gamma(E, TE)$ qui est invariant par multiplication et addition :

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $h_\lambda : E \to E$ la multiplication par λ dans les fibres, qui est un difféomorphisme si $\lambda \neq 0$. On demande

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\forall e \in E)\ dh_\lambda(e).X(e) = X(\lambda e).$$

De façon équivalente ;

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}^*)\ (h_\lambda)_*(X) = X.$$

2) Pour $(e_1, e_2) \in E \oplus E$, on définit $\sigma(e_1, e_2) = e_1 + e_2 \in E$. On demande

$$(\forall (e_1, e_2) \in E \oplus E)\ (X(e_1), X(e_2)) \in T(E \oplus E) \text{ et } d\sigma_{(e_1,e_2)}.(X(e_1), X(e_2)) = X(e_1 + e_2).$$

Montrer que ceci est équivalent à la première définition : dans toute trivialisation $\Phi = \pi \times \tau : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, on a

$$(\Phi_* X)(b, v) = (\xi(b), A(b)v),$$

où $\xi \in \mathcal{X}(U)$ et $A \in C^\infty(U, \mathrm{M}(r, \mathbb{R}))$.

2 On donne une définition «géométrique» d'une connexion linéaire ∇ sur un fibré vectoriel $\pi : E \to B$.

1) On définit d'abord le *sous-fibré vertical* $V \subset TE$ par $V_e = T_e E_{\pi(e)}$ (canoniquement isomorphe à $E_{\pi(e)}$. Montrer que c'est bien un sous-fibré vectoriel (à moins que ça n'ait été vu en cours).

2) On dit qu'un sous-fibré $H \subset TE$ est *horizontal* si $TE = H \oplus V$: H est un supplémentaire de V dans TE, c'est-à-dire

$$(\forall e \in E)\ T_e E = H_e \oplus V_e.$$

Un tel sous-fibré équivaut à la donnée d'une projection fibrée $p^H : TE \to V$, $T_e E \to E_{\pi(e)}$. On définit alors, si $s \in \Gamma(B, E)$:

$$\nabla^H s = p^H \circ ds : TB \to E\ ,\ T_b B \to E_b.$$

Montrer que ceci est une connexion linéaire si et seulement si H est invariant par multiplication et par addition :

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\forall e \in E)\ dh_\lambda(H_e) = H_{\lambda e}$$
$$(\forall (e_1, e_2) \in E \oplus E)\ d\sigma_{(e_1,e_2)}.(H_{e_1} \oplus H_{e_2}) = H_{e_1+e_2}.$$

3 a) (Plus tard, on verra qu'une carte de la forme $\exp_p^{-1}$ a cette propriété) La questiojn est locale, donc on peut supposer $(M, p) = (\mathbb{R}^n, 0)$. Et comme toutes formes quadratiques définies positives sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, ojn peut supposer que $g_{ij}(0, \cdots, 0 = \delta_{ij}$.

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$. On la munit de la métrique riemannienne induite par celle de $\mathbb{R}^N$. On identifie $\mathcal{X}(M) = \Gamma(M, TM)$ à

$$\{X \in C^\infty(M, \mathbb{R}^N) \mid (\forall x \in M) X(x) \in T_x M\}.$$

Si $X \in \mathcal{X}(M)$ et $Y = (y_1, \cdots, y_N) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^N)$, on définit l'application $D_X Y \in C^\infty(M, \mathbb{R}^N)$ par

$$D_X Y = (X.y_1, \cdots, X.y_N) = dy_1(X), \cdots, dy_N(X)).$$

Ensuite, si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ on pose $\nabla_X Y = \pi_{TM}(D_X Y)$, plus explicitement

$$(\nabla_X Y)(x) = \pi_{T_x M}(D_X Y(x)),$$

où $\pi_{T_x M}$ est la projection orthogonale de E sur $T_x M$. On obtient ainsi $\nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$.

a) Montrer qu'on définit ainsi une connexion linéaire (ou dérivation covariante), compatible avec la métrique c'est- à-dire que

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = X.g(Y, Z).$$

b) Montrer que $\nabla X_Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. c) Montrer que

$$(*)\ \ g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\big(X.g(Y,Z)+Y.g(X,Z)-Z.g(X,Y)-g(X,[Y,Z])-g(Y,[X,Z])+g(Z,[X,Y])\big).$$

d) Si maintenant M est une variété riemannienne quelconque, pour $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ on définit $\nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$ par $(*)$. Montrer que c'est bien défini c'est-à-dire que le second membre est $C^\infty(M)$-linéaire en Z.

4 Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n.

a) Si $p \in M$, trouver une carte $\varphi = (x_1, \cdots, x_n)$ centrée en p telle que la métrique $g = \sum g_{ij} dx_i dx_j$ vérifie $g = \sum dx_i^2 + o(||x_1, \cdots, x_n)||)$, soit

$$g_{ij}(x_1, \cdots, x_n) = \delta_{ij} + o(||x_1, \cdots, x_n||) = \delta_{ij} + o(||x||).$$

b) Si $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $g = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ (métrique hyperbolique sur le demi-plan supérieur), montrer qu'il n'y a aucune carte locale centrée (u, v) telle que $g = du^2 + dv^2$.

Indication. Observer que $x + iy \mapsto u + iv$ doit être conforme, donc holomorphe ou antiholomorphe.

c)* Montrer qu'il existe une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il n'y a aucune carte locale centrée (u, v) avec $g = du^2 + dv^2 + o(u^2 + v^2)$.

d) On admet un théorème de Liouville : toute application lisse conforme $\varphi : U \to V$ entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$ est une transformation de Möbius, soit

$$\varphi(x) = y_0 + A(x - x_0) \text{ ou } y_0 + \frac{A(x - x_0)}{||x - x_0||^2},$$

où A est une simlitude vectorielle.

Si $g = f(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ est une métrique sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui est conforme à la métrique euclidienne, que peut-on dire de f ?

e)* Montrer qu'il existe une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il n'y a aucune carte locale centrée (u, v) avec (u, v, w) telle que $g = f(u, v, w)(du^2 + dv^2 + dw^2) + o(||(u, v, w)||^3)$.

5 Soit (M, g) une variété riemannienne, et soit $(x^1, \cdots, x^n)$ une carte centrée où $g = \sum g_{ij} dx^i dx^j$, ou $g_{ij} dx^i dx^j$ en notation einsteinienne. On note $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $\theta = \sqrt{\det(g_{ij})}$. Montrer que

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\operatorname{div}(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = \theta^{-1} \frac{\partial v^i}{\partial x^i}$$

$$\mathrm{vol} = \theta dx_1 \cdots dx^n$$

$$\Delta f = g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \theta^{-1} \frac{\partial(\theta g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j})}{\partial x^i}.$$

6 On prouve ici le théorème de Liouville sur les applications conformes. Soit E un espace vectoriel euclidien complet de dimension (finie ou infnie) au moins 3, et soit U E un ouvert connexe. Soit $\varphi : U \to E$ une application de classe C^3 qui est conforme, c'est- à-dire telle que pour tout $x \in U$, $D\varphi_x$ est une similitude. On note $c(x) \in \mathbb{R}_+^*$ le rapport de similitude, qui vérifie

$$(\forall (x, v) \in UE)||D\varphi_x.v|| = c(x)||v||.$$

On définit $\rho = c^{-1} : U \to \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que c est de classe C^2.

b) Montrer que si $x \in U$ et si $y, z, w \in E$ sont deux à deux orthogonaux, on a

$$\begin{aligned}\langle D^2\varphi_x(y, z), D\varphi_x(w)\rangle &= 0\\ \langle D^2\varphi_x(y, z), D\varphi_x(y)\rangle &= ||y||^2 c(x)Dc_x(z)\\ &= -||y||^2\rho(x)^{-3}D\rho_x(z).\end{aligned}$$

c) Montrer que

$$\rho(x)D^2\varphi_x(y, z) + D\rho_x(z)D\varphi_x(y) + D\rho_x(y)D\varphi_x(z) = 0.$$

d) Montrer que $D^2\rho x(y, w)D\varphi_x(z)$ est symétrique en (z, w) si y, z et w sont deux à deux orthogonaux. En déduire que $D^2\rho_x = \alpha(x)\langle ., .\rangle$.

e) Montrer que $D^2\rho_x = 2a\langle ., .\rangle$ avec $a \in \mathbb{R}$ constante.

f) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $(\forall x)\rho(x) = a||x - x_0||^2 + b$.

g) On suppose que φ est un difféomorphisme sur son image $V \subset E$. Montrer qu'il existe $y_0 \in E$ et $c, d \in R$ tels que

$$(\forall x \in U)(a||x - x_0||^2 + b)(c||\varphi(x) - y_0||^2 + d) = 1.$$

i) Pour $u \in E$ unitaire, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que $x_0 + Iu \subset U$. Montrer qu'il existe $v \in E$ unitaire et $f : I \to \mathbb{R}$ tels que $\varphi(x_0 + tu) = y_0 + f(t)v$ sur I.

j) Montrer que f vérifie

$$f(t) = (at^2 + b) - 1 = cf(t)^2 + d.$$

En déduire que a ou b est nulle.

k) Si $a = 0$, montrer que φ est la restriction d'une similitude affine. Si $b = 0$, montrer que $\sigma \circ \varphi$ est la restriction d'une similitude affine, σ étant une inversion de centre x_0.