Géométrie différentielle 2020-2021

Corrigé du TD3

1 Comme tout est local, on peut supposer que E est trivial, $E = B \times \mathbb{R}^r$, d'où

$$E \oplus E = \{b_1, v_1), (b_2, v_2) \mid b_1 = b_2\} \approx B \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r.$$

Soit $X(b, v) = \xi(, v), V(b, v)$. $h_\lambda(b, v) = (b, \lambda v)$, donc

$$dh_\lambda(b, v).X(b, v) = (\xi(b, v), \lambda V(b, v).$$

De plus, on a $(\xi_1, V_1), (\xi_2, V_2) \in T(E_1 \oplus E_2) \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2$ et

$$\sigma(b, v_1), (b, v_2)) = \sigma(b, v_1, v_2) = (b, v_1 + v_2),$$

donc

$$d\sigma_{(b,v_1,v_2)}.(\xi, V_1), (\xi, V_2)) = d\sigma_{(b,v_1,v_2)}.(\xi, V_1, V_2) = (\xi, V_1 + V_2).$$

Donc si $X(b, v) = \xi(b, v), V(b, v)$, on a

$$\begin{gathered} dh_\lambda(b, v).X(b, v) = X(b, \lambda v) \Leftrightarrow (\xi(b), \lambda V(b, v) = (\xi(b, \lambda v), AV(b, \lambda v)) \\ (X(b, v_1), X(b, v_2)) \in T(E \oplus E) \text{ et } d\sigma.(X(b, v_1), X(b, v_2)) = X(b, v_1 + v_2) \\ \Leftrightarrow \\ \xi(b, v_1) = \xi(b, v_2) \text{ et } V(b, v_1) + V(b, v_2) = V(b, v_1 + v_2). \end{gathered}$$

Donc la seconde définition équivaut à

$$\begin{gathered} (\forall (b, v), \lambda)\ \xi(b, v) = \xi(b)\ ,\ V(b, \lambda v) = \lambda V(b, v) \\ (\forall (b, v_1, v_2)\ V(b, v_1) + V(b, v_2) = V(b, v_1 + v_2), \end{gathered}$$

ce qui est équivalent à $X(b, v) = (\xi(b), A(b)v)$ avec $A(b) \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$.

2 1) On peut supposer E trivial, $E = B \times \mathbb{R}^r$. Alors $TE = (B \times \mathbb{R}^r) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$ ($n = \dim B$), donc

$$V = (B \times \mathbb{R}^r) \times (\{0\} \times \mathbb{R}^r)$$

qui est clairement un sous-fibré de TE.

2) Si $b \in B$, $f \in C^\infty(B, \mathbb{R})$ et $s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, on a

$$\begin{gathered} \nabla^H(fs)(e) = (f\nabla^H s + df \otimes s)(b) \Leftrightarrow p^H_{s(b)} \circ ds(b) = p^H_{f(b)s(b)} \circ dh_\lambda(b, v) \circ ds(b) \\ \nabla^H(s_1 + s_2)(b) = \nabla^H s_1(b) + \nabla^F s_2(b) \\ \Leftrightarrow \\ p^H_{s_1(b)+s_2(b)} \circ d\sigma(s_1(b), s_2(b)) \circ (ds_1(b), ds_2(b)) = p^H_{s_1(b)} \circ ds_1(b) + p^H_{s_2(b)} \circ ds_2(b). \end{gathered}$$

Donc ∇^H est une connexion linéaire ssi

$$\begin{aligned} p^H_e &= p^H_{\lambda e} \circ dh_\lambda(e) \\ p^H_{e_1+e_2} &\circ d\sigma(e_1, e_2) = p^H_{e_1} \oplus p^H_{e_2}. \end{aligned}$$

Puisque $H_e = \ker p^H_e$, ceci équivaut à

$$\begin{aligned} H_{\lambda e} &= dh_\lambda(e)(H_e) \\ H_{e_1+e_2} &= d\sigma(e_1, e_2).(H_{e_1} \oplus H_{e_2}). \end{aligned}$$

3 a) L'application $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ est clairement $C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$-bilinéaire, de plus on a

$$\begin{aligned}\nabla_X(fY) &= \pi_{TM}(D_X(fY) = \pi_{TM}(fD_XY + df(X)Y)\\ &= f\nabla_XY + df(X)Y.\end{aligned}$$

Donc ∇ est une connexion linéaire sur TM. De plus, puisque $\nabla_XY = \pi_{TM}(D_XY$ et que $Z \in TM$, on a $g(\nabla_XY,Z) = g(D_XY,Z) = \langle D_XY,Z\rangle$, et de même $g(\nabla_XZ,Y) = \langle D_XZ,Y\rangle$. Donc

$$g(\nabla_XY,Z) + g(\nabla_XZ,Y) = \langle D_XY,Z\rangle + \langle D_XZ,Y\rangle = X.\langle Y,Z\rangle.$$

Donc ∇ est compatible avec la métrique.

b) On étend X et Y en des champs ambiants $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ au voisinage de $p \in M$ (ou de M tout entière, avec une partition de l'unité). Alors $D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} = [\widetilde{X},\widetilde{Y}]$, de plus sur M on a $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]_{|M} = [X,Y]$. Donc

$$\begin{aligned}\nabla X_Y - \nabla_YX &= \pi_{TM}(D_XY - D_YX) = \pi_{TM}(D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})\\ &= \pi_{TM}([\widetilde{X},\widetilde{Y}]_{|M})\\ &= \pi_{TM}([X,Y]) = [X,Y].\end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned}g(\nabla_XY,Z) + g(\nabla_XZ,Y) &= X.g(Y,Z)\\ g(\nabla_XY,Z) - g(\nabla_YX,Z) &= g([X,Y],Z)\\ g(\nabla_YX,Z) + g(\nabla_YZ,X) &= Y.g(Z,X)\\ g(\nabla_YZ,X) - g(\nabla_ZY,X) &= g([Y,Z],X)\\ g(\nabla_ZX,Y) + g(\nabla_ZY,X) &= Z.g(X,Y)\\ g(\nabla_ZX,Y) - g(\nabla_XZ,Y) &= g([Z,X],Y)\end{aligned}$$

En faisant $(1)+(2)+(3)-(4)-(5)+(6)$ et endivisant par 2,, on trouve

$$g(\nabla_XY,Z) = \frac{1}{2}\big(X.g(Y,Z) + Y.g(X,Z) - Z.g(X,Y) - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y])\big).$$

d) Soit $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Puisque $X.g(Y,Z)$ et $g(X,[Y,Z])$ sont $C^\infty(M,\mathbb{R})$-linéaires en X, il faut montrer que

$$\begin{aligned}&Y.g(fX,Z) - Z.g(fX,Y) - g(Y,[fX,Z]) + g(Z,[fX,Y])\\ &= f\big(Y.g(X,Z) - Z.g(X,Y) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y])\big).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}Y.g(fX,Z) - fY.g(X,Z) &= (Yf)g(X,Z)\\ -Z.g(fX,Y) + fZ.g(X,Y) &= -(Zf)g(X,Y)\\ -g(Y,[fX,Z]) + fg(Y,[X,Z]) &= g(Y,(Zf)X)\\ g(Z,[fX,Y]) - f + g(Z,[X,Y]) &= g(Z,-(Yf)X).\end{aligned}$$

Les sommes 1-4 et 2-3 sont nulles, cqfd.

4 Le problème est local, donc on peut supposer $(M,p) = (\mathbb{R}^n,0)$. Les formes quadratiques définies positives sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, doon on peut supposer $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Ensuite, cherchons un changement de variables $x_i = y_i + \langle S_iy,y\rangle$ où les S_i sont des matrices symétriques, tel que

$$\sum_{i,j} g_{ij}dx_idx_j = \sum_{i=1}^{n} dy_i^2 + o(||y||).$$

On a

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, x\rangle + o(||x||)$$
$$dx_i = dy_i + 2\langle S_i y, dy\rangle,$$

Donc

$$\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i,j} (\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, x\rangle)(dy_i + 2\langle S_i y, dy\rangle)(dy_j + 2\langle S_j y, dy\rangle)$$
$$=$$

Ensuite, cherchons un changement de variables $y_i = x_i + \langle S_i x, x\rangle$ où les S_i sont des matrices symétriques, tel que

$$\sum_{i=1}^{n} dy_i^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j + o(||x||).$$

On a

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \langle v_{ij}, x\rangle + o(||x||) \ , \ v_{ij} \in \mathbb{R}^n$$
$$dy_i = dx_i + 2\langle S_i x, dx\rangle,$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} dy_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx_i + 2\langle S_i x, dx\rangle)^2$$
$$= \sum_{i,j} (\delta_{i,j} + 2\langle S_i e_j, x\rangle + 2\langle S_j e_i, x\rangle + o(||x||).$$

Il faut donc résoudre le système linéaire

$$2S_i e_j + 2S_j e_i = v_{ij},$$

où (v_{ij}) est donné avec $v_{ij} = v_{ji}$. Par linéarité, on se ramène à la dimension 2 et aux quatre cas suivants :

1) $v_{ij} = 0$ sauf $v_{12} = v_{21} = e_1$: on prend $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $v_{ij} = 0$ sauf $v_{11} = e_1$: on prend $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $v_{ij} = 0$ sauf $v_{11} = e_2$: on prend $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $\varphi = (u, v)$ une carte de domaine connexe telle que $g = du^2 + dy^2$. L'application $f : x + iy \mapsto u + iv$ est de classe (au moins) C^1 et sa différentielle en tout point est une similitude de $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, que l'on peut supposer directe quitte à remplacer v par $-v$. Donc f est holomorphe, d'où

$$du^2 + dv^2 = |df|^2 = |f'(x+iy)|^2 |d(x+iy)|^2 = |f'(x+iy)|^2 (dx^2 + dy^2).$$

Donc $|f'(x+iy)| = \dfrac{1}{y}$, soit $\log|f'| = -\log|y|$. Mais puisque f est holomorphe, $\log|f'|$ est harmonique, contradiction.

c)* **À compléter**

d) Supposons que φ soit une isométrie de g sur la métrique euclidienne. Alors φ est conforme, donc de la forme

$$\varphi(x) = y_0 + A(x - x_0) = \varphi^+_{A,x_0,y_0}(x) \text{ ou } y_0 + \frac{A(x - x_0)}{||x - x_0||^2} = \varphi^-_{A,y_0}(x),$$

où A est une similitude vectorielle. Donc

$$\varphi^*(dx^2+dy^2+dz^2) = (\varphi^{\pm}_{A,x_0,y_0})^*(dx^2+dy^2+dz^2) = f^{\pm}_{A,x_0,y_0}(dx^2+dy^2+dz^2).$$

Donc f appartient à une des deux familles $(f^{\pm}_{A,x_0,y_0})$.

e)* **À compléter**

5 6 à compléter