Géométrie différentielle 2020-2021

TD4, mercredi 10 février

Remarque sur le sens de «géodésique». Dans le cours, les géodésiques ont été définies comme les courbes $\gamma : I \to M$ de classe C^2 (en fait C^∞) non constantes vérifiant l'équation $\nabla_t \dot{\gamma} = 0$. On admettra que c'est la même chose que les courbes de classe C^1 par morceaux non constantes qui minimisent localement la longueur et sont paramétrées par longueur d'arc.

1 Soit $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, munie de la métrique riemannienne induite par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1) Soient $p, q \in S^n \cap (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \{0\})$ deux points distincts. Montrer qu'il y a une géodésique minimisante unique de p à q, et que c'est le petit arc du cercle $S^n \cap \mathbb{R}^2$ les joignant.

2) Soient $p, q \in S^2$ deux points distincts non antipodaux. Montrer qu'il y a une géodésique minimisante unique de p à q, et que c'est un arc de grand cercle (intersection de S^n avec un plan passant par l'origine).

3) Que dire des géodésiques minimisantes de p à q si p et q sont antipodaux ?

4) Calculer la distance riemannienne $d(p, q)$ si $p, q \in S^n$.

5) Montrer que $\mathrm{O}(n+1)$ est contenu dans $\mathrm{Isom}(S^n)$, et qu'il agit simplement transitivement sur les repères orthonormés de TS^n.

6) En utilsiant les géodésiques, lontrer que $\mathrm{Isom}(S^n) = \mathrm{O}(n+1)$.

2. Soit S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, munie de la métrique riemannienne induite par celle de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que la projection d'axe vertical $\{(0,0)\} \times \mathbb{R}$ (vertical) de $S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\}$ sur le cylindre $S^1 \times]-1,1[$ préserve les aires (théorème d'Archimède).

2) Montrer qu'un triangle de S^2 est détrminé à isométrie près par ses angles $(\alpha, \beta, \gamma) \in]0, \pi[^3$. *INdication.* L'angle en A est celui entre les plans orientés OAB et OAC, donc entre les vecteurs $A \wedge B$ et $A \wedge C$.

3) Montrer que (α, β, γ) prend exactement toutes les valeurs telles que

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi \ , \ -\alpha + \beta + \gamma < \pi \ , \ \alpha - \beta + \gamma < \pi \ , \ \alpha + \beta - \gamma < \pi.$$

4) Notons $A(\alpha, \beta, \gamma)$ l'aire d'un triangle sphérique d'angles α, β, γ, et $L(\alpha)$ l'aire d'une lunule d'angle $\alpha \in]0, 2\pi[$ comprise entre deux méridiens. Montrer que

$$\begin{aligned}
&L(\alpha) = 2\alpha \\
&A(\alpha, \beta, \gamma) + A(\alpha, \pi - \beta, \pi - c) = L(\alpha) \\
&A(\alpha, \beta, \gamma) + A(\alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma) + A(\pi - \alpha, \pi - \beta, \gamma) + A(\pi - \alpha, \beta, \pi - \gamma) = 2\pi.
\end{aligned}$$

En déduire la formule de Girard (1629) :

$$A(\alpha, \beta, c) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

3 Géométrie hyperbolique Soit n un entier au moins égal à 2. On identifie $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, un point étant noté

$$X = (x_0, x) \ , \ x = (x_1, \cdots, x_n).$$

On note $Q(X) = -x_0^2 + ||x||^2$ (forme quadratique) et $B(X,Y) = -x_0 y_0 + \langle x, y\rangle$ la forme bilinéaitre associée, puis on définit *l'espace hyperbolique* par

$$\begin{aligned} H_n &= \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid Q(X) = -1\ ,\ x_0 > 0\} = \{(x_0, x) \mid x_0 = \sqrt{1 + ||x||^2}\} \\ g_{H_n} &= B_{|TH_n} \text{ (restriction de } B \text{ à } TH_n). \end{aligned}$$

Noter que H_n est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que g_{H_n} est définie positive partout, donc est une métrique riemannienne sur H_n. On l'appelle *métrique hyperbolique, modèle de l'hyperboloïde.*

2) *Modèle de la boule.* On note $B^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y|| < 1\}$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\varphi(X) := \frac{x}{1 + x_0}$$

(projection de centre $(-1, 0)$) est un difféomorphisme de H_n sur B^n, et que l'on a

$$\varphi_* g_{H_n} = \frac{4||dy||^2}{(1 - ||y||^2)^2}. =: g_B.$$

3) *Modèle du demi-espace.* On note

$$\mathbb{R}^n_+ = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_n > 0\}$$

le *demi-espace supérieur*. On définit un difféomorphisme ψ comme restriction à B^n de l'inversion par rapport à la sphère $S = S^{n-1}(-e_n, \sqrt{2})$:

$$\psi(y) = i_S(y) = -e_n + 2\frac{y + e_n}{||y + e_n||^2}.$$

Montrer que ψ est un difféomorphisme de B^n sur $\mathbb{R}^n_+$, et que l'on a

$$\psi_* g_B = \frac{||dz||^2}{z_n^2}.$$