Géométrie différentielle 2020-2021

Corrigé du TD4

1 1) On utilise des coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}(\theta,\varphi) : S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\} &\approx]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times S^{n-1}\\ \theta &= \cos^{-1}(x_n) \text{ (latitude)}\\ \varphi &= \frac{x'}{||x'||}\ ,\ x'=(x_0,\cdots,x_{n-1}) \text{ («longitude généralisée»).}\end{aligned}$$

La métrique s'écrit alors

$$g_{S^n} = d\theta^2 + \cos^2\theta g_{S^{n-1}}.$$

Autrement dit, si $v \in T_{(x',x_n)}S^n$ est décomposé via (θ,φ) en $a\dfrac{\partial}{\partial\theta} + w$ avec $w \in T_{x'}S^{n-1}$, on a

$$||v||^2 = a^2 + \cos^2\theta ||w||^2.$$

Ceci est vrai car tout méridien $\varphi =$ cste, paramétré par θ, est parcouru à vitesse 1, est orthogonal à la sphère «parallèle» $\theta =$ cste, et celle-ci a un rayon $\cos\theta$.

Donc, de même qu'en dimension deux, si $\gamma(a) = (\theta(t),\varphi(t)) : [a,b] \to S^n$ est une courbe évitant les pôles $\pm e_{n+1}$, sa longueur est

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot\theta(t)^2 + ||\dot\varphi(t)||^2}dt.$$

Si $\gamma : [0,1] \to S^n$ va de p à q, elle a un morceau $[a,b]$ qui va de $\theta = \theta(p)$ à $\theta = \theta(q)$ en restant dans $\{\theta \in [\theta(p),\theta(q)]$. (ou $[\theta(q),\theta(p)]$. Ce morceau a une longueur $\geq \int_a^b |\dot\theta(t)|dt \geq |\theta(q)-\theta(p)|$, d'où

$$\ell(\gamma) \geq |\theta(q)-\theta(p)|.$$

On a égalité si et seulement si $\theta\circ\gamma$ reste dans $[\theta(p),\theta(q)]$, φ est constant et θ est monotone. Donc il y a une géodésique minimisante unique de p à q, et c'est le petit arc du cercle $S^n \cap \mathbb{R}^n$ joignant p à q.

2) Puisque p et q sont non antipodaux, il existe $f \in \mathrm{O}(n+1)$ telle que p et q sont dans la situation de 1). Comme $\mathrm{O}(n+1) \subset \mathrm{Isom}(S^n)$ et envoie grand cercle sur grand cercle, il y a une géodésique minimisante unique de p à q, et c'est le petit arc du garnd cercle contenant p et q qui va de p à q.

3) Si γ joint $-e_n$ à e_n, un morceau de γ va de $\theta = -\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon$ à $\theta = \dfrac{\pi}{2}-\varepsilon$. Ce morceau est de longueur $\geq \pi - 2\varepsilon$, donc $\ell(\gamma) \geq \pi$.

Si $\ell(\gamma) = \pi$, alors tout morceau de γ qui va de $\theta = -\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon$ à $\theta = \dfrac{\pi}{2}-\varepsilon$ est de longueur $\leq \pi - 2\varepsilon$. Donc ce morceau est contenu dans un arc de grand cercle, plus précisément de méridien $\varphi =$ cste, donc γ est un méridien $\varphi =$ cste.

En utilisant $\mathrm{O}(n+1)$, on en déduit que si p et q sont antipodaux, les géodésiques minimisantes de p à q sont les demi-arcs de grand cercle de p à q. Elles sont en bijection avec la sphère S^{n-1} dans l'hyperplan orthogonal à p et q.

Remarque. Si $(x, v) \in TS^n$, avec $||v|| = 1$, on a la formules explicite

$$\exp_x(tv) = \cos tx + \sin tv,$$

donc si v est quelconque on a

$$\exp_x(v) = \cos ||v||x + \sin ||v|| \frac{v}{||v||} = \cos ||v||x + \frac{\sin ||v||}{||v||} v.$$

4) Dans le cas 1), on a vu que $d(p, q) = |\theta(p) - \theta(q)|$. Ceci est aussi l'angle dans $]0, \pi[$ entre les vecteurs p et q, qui vaut $\cos^{-1}\langle p, q\rangle$. Comme cette expression est invariante par $\mathrm{O}(n+1)$, elle donne aussi $d(p, q)$ si p et q ne sont pas antipodaux. Et aussi si p et q sont antipodaux par continuité (ou parce que $\langle p, q\rangle = \langle p, -p\rangle = -1$). Donc on a toujours

$$d(p, q) = \cos^{-1}\langle p, q\rangle.$$

5) Tout élément $f \in \mathrm{O}(n + 1)$ est bijectif sur S^n et vérifie que $Df(x) : T_xS^n \to T_xS^n$ est une isométrie, donc $f \in \mathrm{Isom}(S^n)$ [plus précisément, $f_{|S^n} \in \mathrm{O}(n + 1)$).

Un repère orthonormé de S^n est $(x, v_1, \cdots, v_n)$ où $x \in S^n$ et $(v_1, \cdots, v_n)-$ est une base orthonormée de T_xS^n. C'est donc la même chose qu'une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+1}$.

L'action de $f \in \mathrm{Isom}(S^n)$ sur le repère $(x, v_1, \cdots, v_n)$ est

$$f.(x, v_1, \cdots, v_n) = (f(x), Df(x)v_1, \cdots, Df(x).v_n).$$

Si $f \in \mathrm{O}(n + 1)$ cela devient

$$f.(x, v_1, \cdots, v_n) = f(x), f(v_1), \cdots, f(v_n)),$$

c'est-à-dire son action naturelle sur la base orthonormée $(x, v_1, \cdots, v_n)$.

L'action de $\mathrm{O}(n+1)$ est simplement transitive sur les bases orthonormées de ,$\mathbb{R}^{n+1}$, donc sur les repères orthonormés de TS^n.

6) Soit $f \in \mathrm{Isom}(S^n)$. Fixons un repère orthonormé $R = (x, v_1, \cdots, v_n)$ de S^n. Il existe $h \in \mathrm{O}(n + 1)$ tel que $h.R = f.R$. Soit $x \in T_xM$, alors $Df(x).v = h(v) = Dh(x).v = w$. Par naturalité de l'équation des géodésiques, f et h envoient $\exp_x(tv)$ sur $\exp_y(tw)$.

Comme $\exp_y$ est surjective par compacité de S^n (ou par le calcul explicite de $\exp_x$), on a $f = h$, cqfd.

2. 1) On munit $S^2 \setminus \{0, 0, \pm 1\}$ des coordonnées sphériques $(\theta, \varphi) =$ (latitude,longitude), de sorte que

$$g_{S^2} = d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2.$$

Donc la mesure d'aire est

$$\mathrm{aire}_{S^2} = \sqrt{1. \cos^2\theta - 0^2} d\theta d\varphi = \cos\theta d\theta d\varphi.$$

Dans les coordonnées cylindriques $(\varphi = \arg x + iy), z)$, la métrique riemannienne sur le cylindre $S^1 \times]-1, 1[$ est

$$g_{cyl} = d\varphi^2 + dz^2,$$

donc

$$\mathrm{aire}_{S^2} = d\varphi dz.$$

Enfin, la projection $\pi : S^2 \setminus \{0,0,\pm 1\} \to S^1 \times]-1,1[$ d'axe vertical $\{(0,0)\} \times \mathbb{R}$ s'écrit $p : (\theta, \varphi) \mapsto (\varphi, \sin\theta)$, donc

$$p_*(\cos\theta d\theta d\varphi) = p_*(d(\sin\theta) d\varphi) = dz d\varphi,$$

c'est-à-dire que p préserve les aires.

2) Soit ABC un triangle de S^2. L'angle $\widehat{A} \in]0,\pi[$ est le même que l'angle entre les plans orientés OAB et OAC, où $O = (0,0,0)$, centre de la sphère. Donc (en considérant A, B, C comme des vecteurs) on a

$$\cos\widehat{A} = \frac{\langle A \wedge B, A \wedge C \rangle}{||A \wedge B||\ ||A \wedge C||}.$$

Donc la connaissance des angles $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ équivaut à celle des produits scalaires des vecteurs unitaires

$$\frac{A \wedge B}{||A \wedge B||}\ ,\ \frac{B \wedge C}{||B \wedge C||}\ ,\ \frac{C \wedge A}{||C \wedge A||}\ ,$$

ce qui les détermine à isométrie près. Donc les vecteurs

$$(A \wedge B) \wedge (B \wedge C) = \det(A,B,C)B\ ,\ \det(A,B,C)C\ ,\ \det(A,B,C)A$$

sont déterminés à isométrie et un scalaire près : ceci veut dire que A, B, C sont déterminés à isométrie près.

Plus géométriquement : si les angles entre les plans orientés OAB, OAC, OBC sont connus, ces plans orientés (ou les grands cercles orientés associés) sont connus à isométrie près. Si trois plans orientés P_1, P_2, P_3 sont donnés, ils proviennent de l'un des deux triangles isométriques ainsi construits : on prend un des deux points de $P_1 \cap P_2 \cap S^2$, on l'appelle A et on suit les grands cercles $P_1 \cap S^2$ et $P_2 \cap S^2$ dans le sens positif, jusqu'à rencontrer le grand cercle $P_3 \cap S^2$, en les points B et C.

3) La CNS pour pouvoir faire les calculs de 2) est que la matrice des produits scalaires

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\widehat{C} & -\cos\widehat{B} \\ -\cos\widehat{C} & 1 & -\cos\widehat{A} \\ -\cos\widehat{B} & -\cos\widehat{A} & 1 \end{pmatrix}$$

soit inversible. Son déterminant est

$$\begin{aligned} \Delta(A,B,C) &= 1 - \cos^2\widehat{A} - \cos^2\widehat{B} - \cos^2\widehat{C} - 2\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C} \\ &= \sin^2\widehat{A}\sin^2\widehat{B} - (\cos\widehat{C} + \cos\widehat{A}\cos\widehat{B})^2. \\ &= -(\cos(\widehat{A}+\widehat{B}) + \cos\widehat{C})(\cos(\widehat{A}-\widehat{B}) + \cos\widehat{C}). \end{aligned}$$

De plus, les triplets (A,B,C) avec $\det(A,B,C) > 0$ et $\det(A,B,C)$ forment deux connexes tels que les triangles de l'un sont isométriques à ceux de l'autre. Et si $(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}) = (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ce qui est possible, on a $\Delta(A,B,C) = 1$.

Donc $\Delta(A,B,C)$ est toujours > 0, donc $(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})$ prend toutes les valeurs telles que

$$(\cos(\widehat{A}+\widehat{B}) + \cos\widehat{C})(\cos(\widehat{A}-\widehat{B}) + \cos\widehat{C}) < 0.$$

En utiiisant le fait que $|\widehat{A}-\widehat{B}|$ et $\pi - C$ sont dans $]0,2\pi[$, on a deux possibilités :

$$\begin{aligned} &\cos(\widehat{A}+\widehat{B}) < \cos(\pi-\widehat{C}) \text{ et } |\widehat{A}-\widehat{B}|+\widehat{C} < \pi \\ \text{ou : } &\cos(\widehat{A}+\widehat{B}) > \cos(\pi-\widehat{C}) \text{ et } |\widehat{A}-\widehat{B}|+\widehat{C} > \pi. \end{aligned}$$

Si $\widehat{A}+\widehat{B} \leq \pi$, cela donne

$$\begin{aligned} &\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} > \pi \text{ et } |\widehat{A}-\widehat{B}|+\widehat{C} < \pi \\ \text{ou : } &\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} < \pi \text{ et } |\widehat{A}-\widehat{B}|+\widehat{C} > \pi \text{ : impossible.} \end{aligned}$$

Et si $\widehat{A}+\widehat{B} > \pi$,

$$\begin{aligned} &\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C} < \pi \text{ et } |\widehat{A}-\widehat{B}|+\widehat{C} < \pi \\ \text{ou : } &\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C} > \pi \text{ et } |\widehat{A}-\widehat{B}|+\widehat{C} > \pi \text{ : impossible car alors } \widehat{A} \text{ ou } \widehat{B} > \pi. \end{aligned}$$

Une vérification facile mais pénible montre enfin que

$$(\alpha,\beta,\gamma) \text{ réalisable } \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma > \pi\ ,\ -\alpha+\beta+\gamma < \pi\ ,\ \alpha-\beta+\gamma < \pi\ ,\ \alpha+\beta-\gamma < \pi).$$

Noter que $-\alpha+\beta+\gamma < \pi$ équivaut à $(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma) > \pi$, cf la question suivante.

4) L'aire $L(\alpha)$ est proportionnelle à α, et $L(2\pi) = \text{aire}(S^2) = 4\pi$ (aire du cylindre). Donc $L(\alpha) = 2\alpha$.

Ensuite, la lunule d'angle α se décompose en deux triangles (α,β,γ) et $(\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma)$, donc

$$A(\alpha,\beta,\gamma)+A(\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma) = 2\alpha. \tag{1}$$

De même, on a

$$A(\alpha,\beta,\gamma)+A(\pi-\alpha,\beta,\pi-\gamma) = 2\beta \tag{2}$$

et

$$A(\alpha,\beta,\gamma)+A(\pi-\alpha,\pi-\beta,\gamma) = 2\gamma. \tag{3}$$

Enfin, deux lunules d'angle α et $\pi-\alpha$ forment un hémisphère, d'angle 2π. En décomposant ces lunules en triangles, il, vient

$$A(\alpha,\beta,\gamma)+A(\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma)+A(\pi-\alpha,\pi-\beta,\gamma)+A(\pi-\alpha,\beta,\pi-\gamma) = 2\pi. \tag{4}$$

En faisant (1)+(2)+(3)-(4) et en divisant par 2, on trouve la formule de Girard :

$$A(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha+\beta+\gamma-\pi.$$