Géométrie différentielle 2020-2021

TD5, mercredi 24 février

1 1) Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ munie de la métrique riemannienne induite, montrer que l'équation des géodésiques est $\ddot{\gamma} \in TM^\perp$.

2) Montrer que les géodésiques de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ à vitesse 1 sont $\gamma(t) = \cos t\ v_1 + \sin t\ v_2$ où $v_1, v_2 \in S^{n-1}$ sont orthogonaux.

3)Montrer que $d\exp_p(v)$ est représentée dans des bases orthonormées par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sin ||v||}{||v||} \mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2 Soit g la métrique hyperbolique sur la boule unité :

$$g = \frac{4||dx||^2}{(1-||x||^2)^2} = \frac{4\sum_{i=1}^n dx_i^2}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}.$$

Si $v \in T_0 B^n = \mathbb{R}^n$, soit $\gamma_v(t) = \exp(tv)$ la géodésique unitaire telle que $\gamma(0) = 0$ et $\dot{\gamma}(0) = v$.

1) Montrer que si f est une isométrie de (B^n, g) préservant 0, on a $f \circ \gamma_v = \gamma_{f_*(v)}$.

2) En déduire que γ est à valeurs dans $\mathbb{R}v$.

3) Calculer $\exp_p(v)$.

4) Montrer que $\exp_p$ est un difféomorphisme de $T_p B^n$ sur B^n.

5) Montrer que $d\exp_p(v)$ est représentée dans des bases orthonormées par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sinh ||v||}{||v||} \mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

3 Soit g la métrique hyperbolique sur le demi-plan supérieur $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$g = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2.$$

1) Montrer que la métrique est complète, en montrant que si $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}_+^n$ est propre et à vitesse bornée, alors $]a, b[= \mathbb{R}$. *Indication : étudier les variations de* $\log \gamma_n(t)$ *et de* $\log \gamma_n(t)$.

2) Calculer les coefficients de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_\ell g^{k\ell}(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij})$.

3) Soit $\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ une géodésique. On rappelle que c'est une solution du système

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0\ ,\ 1 \leq k \leq n.$$

Montrer qu'il existe des constantes $C_1, \cdots, C_{n-1}$ non négatives telles que $\dot{x}_i(t)^2 = C_i x_n(t)$ pour $i < n$.

4) Si les C_i sont tous nuls, montrer que $\gamma(t) = (a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n e^{Bt})$ avec $a_n > 0$ et $B \neq 0$.

5) Si $C_i \neq 0$, montrer qu'il existe une isométrie hyperbolique $g(x', x_n) = (Ax' + b, x_n)$ où $A \in \mathrm{O}(n-1)$ et $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $g(\gamma(t)) = (X(t), 0, \cdots, 0, Y(t)) \in \mathbb{R} \times \{0_{\mathbb{R}^{n-2}}\} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\dot{X}^2 = CY$ avec $C = \sum C_i$.

6) Montrer que $X + \dfrac{Y\dot{Y}}{\dot{X}}$ est constant, et en déduire que γ est un demi-cercle orthogonal à $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

4 Soient M une variété riemannienne, $\gamma : I \to M$ un chemin de classe C^1 et $X : I \to TM$ un champ de vecteurs de classe C^1 le long de γ.

1) Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ tel que dans toute carte où $\gamma \circ \varphi(t) = (x_1(t) \cdots, x_n(t))$ et $\varphi_* X(t) = (a_1(t), \cdots, a_n(t))$, on a

$$\varphi_*(\nabla_{\dot{\gamma}} X) = \sum_k (\dot{a}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k a_i \dot{x}_j) \partial_k.$$

On le note aussi $\dfrac{DX}{dt}$. On dit que X est *parallèle le long de* γ si $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$.

2) Montrer que si $t_0 \in I$ et $v \in T_{\gamma(t_0)} M$, il existe un unique champ de vecteurs X parallèle le long de γ et tel que $X(t_0) = v$. On l'appelle *transport parallèle de* X *le long de* γ.

3) Si X est parallèle le long de γ, montrer pour tout $t \in I$ que l'application $X(t_0) \mapsto X(t)$ est linéraire et isométrique.

4) Si γ est de classe C^2, montrer qu'elle est géodésique si et seulement si $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

5) Soit $f = f(t, u)$ une application de classe C^2 d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans M. Montrer que

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t}.$$

6) Soit $p \in M$, et soit $v \in T_p M$ tel que $\exp_p(v)$ est défini. Montrer que $X(t) = d \exp_p(tv).v$ est parallèle le long de $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ et en déduire que $||d \exp(v).v|| = ||v||$.

7) On suppose que $v, w \in T_p M$ sont orthogonaux et que $\exp_p(v)$ est défini. En consiérant $f(t, u) = \exp_p(t(v + uw))$, montrer que $d \exp_p(v).v$ et $d \exp_p(v).w$ sont orthogonaux.

8) On suppose $\dim M = 2$ et on munit $T_p M$ de coordonnées polaires (r, θ) via une application $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to T_p M$. Soit U un voisinage de 0 dans $T_p M$ sur lequel $\exp_p$ est définie, montrer que

$$(\exp_p \circ \psi)^* g = dr^2 + f(r, \theta) d\theta^2,$$

où $f(r, \theta) = ||\partial_\theta \psi||^2$.