Géométrie différentielle 2020-2021

Corrigé du TD5

1 1) La connexion de Levi-Civita est $\nabla_X Y = \pi_T D_X Y$. Donc si X est un champ de vecteurs le long de γ, en considérant X comme une application $I \to \mathbb{R}^N$, on a

$$\nabla_t X = \nabla_{\dot\gamma} X = \pi_{TM} \dot X,$$

et en particulier $\nabla_t \dot\gamma = \pi_{TM}\ddot\gamma$. Donc γ est une géodésique ssi $pi_{TM}\ddot\gamma = 0$ c'est-à-dire que $\ddot\gamma(t)$ est perpendiculaire à $T_{\gamma(t)}M$.

2) D'après 1), une courbe $\gamma : I \to S^n$ est géodésique ssi $\ddot\gamma(t) \in (T_{\gamma(t)}S^n)^\perp =: R\gamma$, soit s'il existe $\lambda(t)$ tel que $\ddot\gamma(t) = \lambda(t)$. Par ailleurs, on a $\langle \gamma, \gamma\rangle \equiv 1$, donc $\langle \dot\gamma, \gamma \angle \equiv 0$ puis

$$\langle \ddot\gamma, \gamma\rangle + \langle \dot\gamma, \dot\gamma\rangle = 0.$$

De plus, $\langle \dot\gamma, \dot\gamma\rangle$ est le carré de la vitesse, qui est une constante $c^2 > 0$. D'où $\lambda(t) = \langle \ddot\gamma, \gamma\rangle = -c^2$, donc l'équation des géodésiques de vitesse c est

$$\ddot\gamma = -c^2\gamma,$$

dont la solution générale est

$$\gamma(t) = (\cos ct)\gamma(0) + \frac{\sin ct}{c}\dot\gamma(0).$$

Donc si $x \in S^n$ et $v \in T_x S^n = x^\perp$, on a

$$\exp_x(v) = (\cos ||v||)x + \frac{\sin ||v||}{||v||} v.$$

3) **(solution plus simple que celle vue pendant le TD)** Si $v \in T_x M$ est unitaire et $\gamma(t) = \exp_x(tv)$, on ad'abord $d\exp_x(v).v = \dot\gamma(1)$, qui est un vecteur unitaire. Donc dans des bases commençant par v et $\dot\gamma(1)$, la matrice de $d\exp_x(v)$ a une première colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, si $w \in T_x S^n \cap v^\perp$, on a

$$d\exp_p(v).w = \frac{d}{ds}_{|s=0} (\cos(||v+sw||) + \frac{\sin ||v+sw||}{||v+sw||}(v+sw).$$

Puisqu'on est en $s=0$, le seul terme qui reste est la d/'erivée de $v + sw$ à la fin, donc

$$d\exp_p(v).w = \frac{\sin ||v||}{||v||} w.$$

Donc dans des bases orthonormées $(v, v_1, \cdots, v_{n_1})$ et $(\dot\gamma(0), v_1, \cdots, v_{n_1})$, la matrice de $d\exp_p(v)$ est bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sin ||v||}{||v||} \mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2 1) D'une facçon générale, pour toute isométrie f d'une variété riemannienne et tout $(x,v) \in TM$ on a $f(\exp_p(tv)) = \exp_{f(p)}(tdf_p(v))$. Donc

$$f(\gamma_v(t)) = \gamma_v(tdf_p(v)) \ , \text{ soit } f \circ \gamma_v = \gamma_{df_p(v))} = \gamma_{f_*(v)}.$$

2) Clairement, le groupe $\mathrm{O}(n)$ (vu comme sous-groupe de $\mathrm{Diff}(B^n)$ est contenu dans $\mathrm{Isom}(B^n, g)$. Donc si $f \in \mathrm{O}(n)$ et f fixe v, on a

$$f \circ \gamma_v = \gamma_{f_*(v)(t)} = \gamma_{f(v)}(t) = \gamma_v(t).$$

Prenant pour f la symétrie orthogonale s_v par rapport à $\mathbb{R}v$, on donc $\gamma_v(t) \in \mathrm{Fix}(s_v) = \mathbb{R}v$.

3) On a $\exp_0(tv)\gamma_v(t) = x(t)v$ et $||\gamma_v'(t)||_{\gamma_v(t),g}||$ est constante égale à $||v||_{0,g} = 2||v||_{eucl} = 2a$. De plus, γ_v est une immersion et $\gamma'(0) = x'(0)v = v$, donc $x'(0) = 1$ et $x' > 0$. Donc

$$||\gamma'(t)||_{\gamma_v(t),g} = \frac{2||\gamma_v'(t)||_{eucl}}{1 - ||\gamma_v(t)||^2} = \frac{2ax'(t)}{1 - 4a^2x(t)^2} = 2a,$$

donc x est solution de l'équation différentielle

$$\frac{2ax'(t)}{1 - 4a^2x(t)^2} = 2a,$$

soit

$$\frac{d}{dt}\tanh(2at) = 2a.$$

Puisque $x(0) = 0$, il vient

$$x(t) = \frac{\tanh(2at)}{2a} = \frac{\tanh(2||v||_{eucl}t)}{2||v||_{eucl}}v,$$

donc

$$\exp_0(v) = \frac{\tanh(2||v||_{eucl})}{2||v||_{eucl}}v.$$

4) Par homogénéité de g_{hyp}, il suffit de le faire en $p = 0$. De même pour la question 5).

Puisque tanh est un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,1[$, $\exp_0$ est bijectif d'inverse $\exp_0^{-1}(w) = \dfrac{\tanh^{-1} 2||w||_{eucl}}{2||w||_{eucl}}w$, qui est lisse. Donc $\exp_0$ est un difféomorphisme de $T_0\mathbb{R}^n$ sur B^n.

5) Si w est orthogonal à v, on a

$$d\exp_0(v).w = \frac{\tanh 2||v||_{eucl}}{2||v||_{eucl}}w,$$

dont la norme pour g_{hyp} dans $T_{\exp_0(v)}B^n$ est

$$\begin{aligned} ||d\exp_0(v).w||_{\exp_0(v)} &= \frac{\tanh 2||v||}{2||v||}.\frac{2}{1 - \tanh^2 2||v||} \\ &= \frac{\sinh 2||v||_{eucl}}{||v||_{eucl}}.2||w||_{eucl}. \end{aligned}$$

Comme $2||v||_{eucl} = ||v||_{hyp,0}$, $d\exp_v$ est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sinh ||v||}{||v||}\mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

dans toute base orthonormée de T_0B^n commençant par $\frac{v}{||v||_{hyp}}$.

3 1) Dire que $||\dot\gamma||_{hyp} \leq C$ veut dire que $\frac{||\dot\gamma(t)}{\gamma_n(t)}|| \leq C$, d'où

$$\max\Big(\frac{d}{dt}\log\gamma_n(t), \big|\frac{d}{dt}\log||\gamma(t)||\big|\Big)) \leq \frac{||\dot\gamma(t)||}{\gamma_n(t)} \leq C.$$

Donc si $t \in [t_0, \beta]$ avec $a < \beta < b$, on a

$$\begin{aligned} \log\gamma_n(t) &\in [\log\gamma_n(t_0) - C|\beta|, \log\gamma_n(t_0) + C|\beta|] \\ \log||\gamma(t)|| &\leq \log||\gamma(0)|| + \beta, \end{aligned}$$

Donc $\gamma(t)$ reste dans un compact $K(\beta) \subset \mathbb{R}^n_+$. Comme γ est propre, on a $b = +\infty$, et symétriquement $a = -\infty$.

2) On a $g_{ij} = x_n^{-2}\delta_{ij}$, donc $g^{ij} = x_n^2\delta_{ij}$, donc

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}x_n^2(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

On distingue huit cas (non exclusifs) :

1) Si i, j, k sont distincts, $\Gamma^k_{ij} = 0$.

2) Si $i = j \neq k$ et $k \neq n$, $\Gamma^k_{ii} = 0$.

3) Si $i = j \neq k$ et $k = n$, $\Gamma^n_{ii} = \frac{1}{2}(-x_n^2)\partial_n(x_n^{-2}) = x_n^{-1}$.

4) Si $i \neq j = k$ et $i \neq n$, $\Gamma^j_{ij} = 0$.

5) Si $i \neq j = k$ et $i = n$, $\Gamma^j_{nj} = -x_n^{-1}$.

6) Si $i = k \neq j$ et $j \neq n$, $\Gamma^k_{ij} = 0$.

7) Si $i = k \neq j$ et $j = n$, $\Gamma^i_{in} = -x_n^{-1}$.

8) Si $i = j = n$, $\Gamma^n_{nn} = -x_n^{-1}$.

3) D'après 2), l'équation des géodésiques est

$$\begin{aligned} &\ddot x_i - 2x_n^{-1}\dot x_n\dot x_i = 0\ ,\ i < n \\ &\ddot x_n + x_n^{-1}\sum_{i<n}\dot x_i^2 - x_n^{-1}\dot x_n^2 = 0. \end{aligned}$$

La première équation s'intègre en $x_i = 0$ ou $\log(\dot x_i^2) = \log x_n + c_i$, soit $\dot x_i^2 = C_i x_n$ avec $C_i = e^{c_i}$. Donc $\dot x_i^2 = Cx_n$ avec $C_i \geq 0$ dans tous les cas.

4) Les x_i sont alors des constantes a_i pour $i < n$. La seconde équation s'écrit $\ddot x_n - x_n^{-1}\dot x_n^2 = 0$ soit $\ddot x_n \dot x_n^{-1} = \dot x_n x_n^{-1}$, qui s'intègre en $\dot x_n = Bx_n$, soit $x_n = a_n e^{Bt}$. De plus, $a_n > 0$ puisque $x_n > 0$, et $B \neq 0$ puisque γ n'est pas constante.

5) Le vecteur $(\dot x_1, \cdots, \dot x_{n-1})$ est proportionnel à $\vec{C} = (C_1, \cdots, C_{n-1}) \neq 0$. Il existe une isométrie $g(x', x_n) = (Ax' + b, x_n)$ telle que $A\vec{C} = (\sqrt{\sum C_i^2}, 0, \cdots, 0)$ et $A\gamma(0)' + b = 0$. Donc

$$g \circ \gamma(0) \in \{(0, \cdots, 0)\} \times \mathbb{R}_+^* \text{ et } (\forall t)\ \frac{d}{dt}(g \circ \gamma(t)) \in \mathbb{R} \times \{(0, \cdots, 0)\} \times \mathbb{R}.$$

Donc $g \circ \gamma(t)$ reste dans $\mathbb{R} \times \{(0, \cdots, 0)\} \times \mathbb{R}_+^*$ pour tout t, soit $g \circ \gamma(t) = (X(t), 0 \cdots, 0, Y(t))$. De plus,

$$\dot X^2 = \sum_{i<n} \dot x_i^2 = (\sum C_i) y = CY.$$

6) Comme $g \circ \gamma$ est une géodésique, on a $\ddot Y = -Y^{-1}\dot X^2 + Y^{-1}\dot Y^2$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(X + \frac{Y\dot Y}{\dot X}\Big) &= \dot X + \frac{\dot Y^2 + Y\ddot Y}{\dot X} - \frac{Y\dot Y\ddot X}{\dot X^2} \\
&= \dot X + \frac{\dot Y^2 - \dot X^2 + \dot Y^2}{\dot X} - \frac{2Y\dot Y Y^{-1}\dot Y\dot X}{\dot X^2} \\
&= \dot X + 2\frac{\dot Y^2}{\dot X} - \dot X - \frac{2\dot Y^2}{\dot X} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $X\dot X + Y\dot Y = a\dot X$, soit $(X - \frac{a}{2})^2 + Y^2 = \frac{a^2}{4}$, ce qui est l'équation d'un cercle orthogonal à $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Donc $g \circ \gamma$ reste dans un demi-cercle orhogonal au bord, ce qui implique la mêm propriété pour γ.

Remarque. Ces calculs ne sont pas la méthode la plus efficace pour déterminer les géodésiques de l'espace hyperbolique !

4 Soient M une variété riemannienne, $\gamma : I \to M$ un chemin de classe C^1 et $X : I \to TM$ un champ de vecteurs de classe C^1 le long de γ.

1) Si $\dot\gamma(t) = 0$, on pose $(\nabla_{\dot\gamma} X)(t) = 0$. Sinon, il existe des champ de vecteurs $\widetilde{X}$ et V au voisinage de $\gamma(t)$ tels que $\widetilde{X} \circ \gamma = X$ et $V \circ \gamma = \dot\gamma$. On pose alors

$$(\nabla_{\dot\gamma} X)(t) = (\nabla_V \widetilde{X})(t).$$

Ceci ne dépend pas de $\widetilde{X}$, V. En effet, si φ est une carte en $\gamma(t)$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \gamma(t) = \gamma^\varphi = (x_1(t), \cdots, x_n(t))\ ,\ \varphi_* V = \sum v_i \partial_i\ ,\ \varphi_* \widetilde{X} = \sum \widetilde{a}_i \partial_i \\
v_i \circ \gamma^\varphi = \dot\gamma^\varphi\ ,\ \varphi_* X(t) = \sum a_i(t) = \sum_i \widetilde{a}_i(\gamma^\varphi(t))\partial_i.
\end{aligned}$$

Donc si les Γ_{ij}^k sont les coefficients de Christoffel dans la carte φ, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_*(\nabla_V \widetilde{X}) &= \Big(\sum_{i,j} v_i(\gamma^\varphi(t))\widetilde{a}_j(\gamma^\varphi(t))\partial_j + \sum_k \Gamma_{ij}^k v_i(\gamma^\varphi(t))\widetilde{a}_j(\gamma^\varphi(t))\partial_k\Big) \\
&= \Big(\sum_{i,j} \dot x_i(t) a_j(t)\partial_j + \sum_k \Gamma_{ij}^k \dot x_i(t) a_j(t)\partial_k\Big)
\end{aligned}$$

Ceci ne dépend que des $a_j(t)$ c'est-à-dire de X.

Donc $\nabla_{\dot\gamma}X$ est bien défijni, et par construction, dans toute carte φ, on a

$$\varphi_*(\nabla_{\dot\gamma}X) = \sum_k (\dot a_k + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k a_i \dot x_j)\partial_k.$$

2) Dans un domaine U d'une carte φ, l'équation $\nabla_{\dot\gamma}X = 0$ s'écrit

$$\dot a_i + \sum_{j,k}\Gamma_{ij}^k(x_1,\cdots,x_n)\dot x_i \dot a_j = 0,$$

où $\varphi_* X(t) = \sum a_i(t)\partial_i$. Donc elle est linéaire, donc toute solution maximale définie en $t_1 \in I \cap \gamma^{-1}(U)$, est définie pour tout temps $t \in I \cap \gamma^{-1}(U)$. Donc toute solution maximale est définie sur I.

3) La linéarité de l'équation a été observée en 2), et se voit sans passer à une carte puisque $\nabla_{\dot\gamma}$ est linéaire. Donc l'application $X(t_0) \mapsto X(t)$ est linéaire. De plus, on a

$$\frac{d}{dt}||X(t)||^2 = 2\nabla_{\dot\gamma}(t)X, X(t)\rangle = 0,$$

donc c'est une isométrie.

4) Si γ est de classe C^2, montrer qu'elle est géodésique si et seulement si $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$.

5) Cela vient du fait que $\nabla_t\dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}X$ d'après l'expression donnée dans le cours.

6) Puisque $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ est une géodésique, on a $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. Or

$$\dot\gamma = d\exp_p(tv).v = X(t),$$

donc $\nabla_{\dot\gamma}X = 0$. Donc X est parallèle le long de γ. Par 5), sa norme est constante. Donc

$$||d\exp(v).v|| = ||X(1)|| = ||X(0)|| = ||v||.$$

7) L'application $\gamma_u = f(.,u)$ est gédoésique, donc $\dot\gamma_u = \frac{\partial f(.,u}{\partial t}$ est parallèle le long de γ_u. On a

$$d\exp_p(tv).w = \partial_u f(t,0),$$

champ de vecteurs le long de γ. En utilisant la symétrie de la connexion, on a (avec la notation ∇_t plus lisible ici)

$$\nabla_t(d\exp_p(tv).w) = \nabla_t\partial_u f(t,0) = \nabla_u\partial_t f(t,0).$$

Puisque $d\exp_p(tv).v$ est parallèle, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle d\exp_p(tv).v, d\exp_p(tv).w\rangle &= \langle d\exp_p(tv).v, \nabla_t(d\exp_p(tv).w)\rangle \\
&= \langle \partial_f(t,0), \nabla_u\partial_t f(t,0)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{du}_{|u=0}||\partial_t f(.,u)||^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{du}_{|u=0}||v+tw||^2 \quad \text{car } f(.u) \text{ est géodésique} \\
&= \langle v, w\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

8) On a $\psi(r,\theta) = rv(\theta)$ avec $||v(\theta)|| = 1$, donc

$$||\partial_r(\exp_p \circ\psi)(r,\theta)|| = ||d\exp_p(rv(\theta)).v(\theta))|| = 1.$$

Puis

$$\partial_\theta(\exp_p \circ\psi)(r,\theta) = d\exp_p(rv(\theta)).\partial_\theta\psi.$$

Comme $||\psi(r,\theta)|| = r$, ∂_θ est orthogonal à $\partial_r\psi$. D'où

$$\begin{aligned}(\exp_p \circ\psi)^* g &= ||\partial_r||^2 dr^2 + 2\langle\partial_r, \partial_\theta\rangle dr d\theta + ||\partial_\theta||^2 d\theta^2 \\ &= dr^2 + ||\partial_\theta||^2 d\theta^2.\end{aligned}$$