Géométrie différentielle 2020-2021

TD6, mercredi 3 mars

1 Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de même dimension, et soit $f \in C^\infty(M, N)$ une application augmentant (au sens large) infinitśimalement les distances, c'est-à-dire que

$$(\forall v \in TM)\ ||df.v||_h \geq ||v||.$$

On suppose de plus que M est complète.

1) Montrer que N est complète. *Indication. On utilisera le fait qu'une variété riemannienne est complète ssi toute courbe de longueur finie issue d'un point fixé reste dans un compact. Montrer que toute courbe de longueur finie dans N issue d'un point $f(x_0)$ se relève en une courbe de M issue de x_0 et telle que $f \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.*

2) Montrer que f est un revêtement. *Indication. Si $y_0 \in N$ et $x \in f^{-1}(\{y_0\})$, l'application* $\exp_x : T_xM \to M$ *se relève à $E_x : T_xM \to N$ telle que $E_x(0) = x$.*

3) a) On suppose que M est complète et connexe et que, pour tout $x \in M$, l'application $\exp_x : T_xM \to M$ augmente infinitésimalement les distances (c'est le cas si la courbure est ≤ 0, par exemple si M est localement isométrique à $\mathbb{H}_n$). Montrer que tout lacet géodésique est non homotope à zéro

b) On suppose M compacte, sans hypothèse sur $\exp_x$. Montrer que toute classe d'homotopie non triviale de lacets de M contient un élément de longueur minimale, qui est représenté par une géodésique fermée.

On admettra qu'une courbe Lipschitz qui est paramétrée proportionnellemant à la longueur d'arc et qui minimise localement la longueur est une géodésique. Ici la longueur d'une courbe continue $\gamma : [a, b] \to M$ est

$$\mathrm{long}(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

où la borne supérieure (qui peut être infinie) est prise sur toutes les subdivisions $a = t_0 < t_1 > \cdots < t_n = b$. Une courbe fermée qui minimise localement la longueur est supposée paramétrée par $\mathbb{R}/c\mathbb{Z}$.

c) On suppose que M est compacte et connexe, et que $\exp_x$ augmente infiniésimalement les distances pour tout $x \in M$. Montrer que M a une géodésique fermée de longueur minimale, et que cette longueur est le double du rayon d'injectivité

$$\mathrm{rayinj}(M, g) = \min_{x \in M} \mathrm{rayinj}_x(g)).$$

2. Calculer les rayons d'injectivité des variétés riemanniennes suivantes :

1) $M = S^n$ avec la métrique standard.

2) $M = \mathbb{RP}^n$, quotient de S^n avec la métrique standard

3) $M = L(p, q)$ (lenticulaire), quotient de $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ par $(z, w) \sim (e^{\frac{2\pi i}{q}} z, e^{\frac{2\pi i p}{q}} w)$, avec q entier ≥ 2, p entier dans $[1, q-1]$ premier avec q.

4) $M = (\mathbb{R}^2_+, \frac{dx^2+dy^2}{y^2})$ (plan hyperbolique, modèle du demi-plan) quotienté par $(x, y) \sim (\lambda(x, y)$, $\lambda > 1$.