Géométrie différentielle 2020-2021

TD7, mercredi 17 mars

1 Soit (M, g) une surface riemannienne.

1) Si $x \in M$, on note $K_g(x)$ la courbure sectionnelle en x, soit

$$K_g(x) = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1\rangle,$$

(e_1, e_2) étant une base orhonormée de T_xM. Montrer que le tenseur de courbure en x est

$$\langle R_g(X, Y)Z, T\rangle = K_g(x)(\langle X, T\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, T\rangle).$$

2) Calculer $K_g(x, y)$ pour $g = dx^2 + f(x, y)dy^2$.

3) Même question pour $g = f(x, y)(dx^2 + dy^2)$.

2 Soit G un groupe de Lie, dont l'unité est notée 1. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, formée des champs de vecteurs invariants à gauche.

1) Montrer que si G est compact, il admet une métrique riemannienne bi-invariante, soit $\ell_x^* g = r_x^* g$ pour tout $x \in G$, où $\ell_x(y) = xy$, $r_x(y) = yx$.

2) Montrer que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ n'ont pas de métrique bi-invariante si $n \geq 2$.

On suppose maintenant que G est muni d'une métrique bi-invariante g. Soient $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

3) En utilisant l'invariance à gauche de g, montrer que

$$\langle X, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\langle Y, [X, Y]\rangle.$$

4) Utiliser la bi-invariance pour montrer que

$$\langle [X, Y], Z\rangle = \langle X, [Y, Z]\rangle.$$

5) Montrer que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$.

6) Montrer que les géodésiques de G sont les sous-groupes à un paramètre $(\varphi(t))$, ce qui est la même chose que les orbites $(\varphi_X^t(1))$, où $X \in \mathfrak{g}$. **Plutôt $x\varphi_X^t(1)$ pour avoir toutes les géodésiques, pas seulement celles qui passent par 1.**

7) Montrer que le tenseur de courbure est

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}\langle [X, Y], Z\rangle.$$

8) Montrer que

$$\langle R(X, Y)Y, X\rangle = \frac{1}{4}||[X, Y]||^2.$$

3 Soit (M, g) une variété compacte plate.

1) Montrer que l'exponentielle $T_xM \to M$ est un revêtement localement isométrique.

2) En déduire que M est isométrique à $\mathbb{R}^n/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ agissant proprement et librement sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que les sous-groupes Γ possibles sont exactement ceux qui sont discrets, sans torsion et cocompacts (il existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compact tel que $\Gamma K = \mathbb{R}^n$).

   On suppose maintenant $n = 2$.

3) Soit $\Gamma \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ un sous-groupe discret, sans torsion et cocompact. Montrer que Γ est contenu dans le sous-groupe des translations, et qu'en identifiant celui-ci à $\mathbb{R}^2$, Γ est un réseau (= sous-groupe discret de rang 2, ou cocompact).

4) Montrer que toute surface riemannienne compacte plate est un tore ou une bouteille de Klein.

Remarque. Le premier théorème de Bieberbach dit que si $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-groupe discret, sans torsion et cocompact, alors $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ est d'indice fini (mieux : borné par une fonction de n) dans Γ et est un réseau de $\mathbb{R}^n$, donc $\mathbb{R}^n/\Gamma$ a un revêtement fini qui est un tore.