Géométrie différentielle 2020-2021

TD7, mercredi 17 mars

1 Soit (M, g) une surface riemannienne.

1) Puisque $R(X, Y)$ est anti-auto-adjoint, on a

$$R(e_1, e_2)e_1 = -K_g(x)e_2 \ , \ R(e_1, e_2)e_2 = K_g(x)e_1.$$

Et puisqu'il est bilinéaire alterné en (X, Y), si si $X = x_1e_1 + x_2e_2$ et $Y = y_1e_1 + 2e_2$, on a $R(X, Y) = (x_1y_2 - x_2y_1)R(e_1, e_2)$, donc si $Z = z_1e_1 + z_2e_2$, $T = t_1e_1 + t_2e_2$, on a

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, T\rangle &= \langle (x_1y_2 - x_2y_1)R(e_1, e_2)z_1e_1 + z_2e_2, t_1e_1 + t_2e_2\rangle \\ &= -K_g(x)(x_1y_2 - x_2y_1)(z_1t_2 - z_2t_1) \\ &= K_g(x)\big((x_1t_1 + x_2t_2)(y_1z_1 + y_2z_2) - (x_1z_1 + x_2z_2)(y_1t_1 + y_2t_2)\big).\end{aligned}$$

2) Puisque $x \mapsto (x, y)$ est une géodésique et que ∂_y est orthogonal à x et de norme $\sqrt{f}$, on a

$$\nabla_x\partial_x = 0 = \nabla_x\big(\frac{\partial_y}{\sqrt{f}}\big).$$

Donc, en posant $h = \sqrt{f}$:

$$\begin{aligned}\nabla_x\partial_y &= \frac{\partial_x h}{h}\partial_y \\ \nabla_y\partial_x = \nabla_x\partial_y &= \frac{\partial_x h}{h}\partial_y.\end{aligned}$$

Puisque $(\frac{\partial_y}{h}, \partial_x)$ est une base orthonormée, il vient

$$\begin{aligned}K_g &= \frac{1}{h^2}\langle\nabla_y\nabla_x\partial_x - \nabla_x\nabla_y\partial_x, \partial_y\rangle \\ &= \frac{1}{h^2}\langle -\nabla_x(\frac{\partial_x h}{h}\partial_y), \partial_y\rangle \\ &= \frac{1}{h^2}\big(- \frac{\partial_{xx}h}{h}\partial_y + \frac{(\partial_x h)^2}{h^2}\partial_y - (\frac{\partial_x h}{h})\nabla_x\partial_y, \partial_y\rangle \\ &= -\frac{\partial_{xx}h}{h} \\ &= -\frac{\partial_{xx}\sqrt{f}}{\sqrt{f}}.\end{aligned}$$

Remarque. C'est aussi égal à

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial_{xx}f}{f} + \frac{1}{4}\big(\frac{\partial_x f}{f}\big)^2,$$

mais la première forme est plus parlante, en effet l'équation $\partial_{xx}\sqrt{f} + Kf = 0$ évoque l'équation des champs de Jacobi normaux en dimension deux, soit $\ddot{J} + KJ = 0$.

3) Il est commode de poser $h = \log f/2$, $f = e^{2h}$. Donc

$$\langle\partial_x, \partial_x\rangle = \langle\partial_y, \partial_y\rangle = e^{2h} \ , \ \langle\partial_x, \partial_x\rangle = \langle\partial_y, \partial_y\rangle = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\langle \nabla_x \partial_x, \partial_x \rangle &= \frac{1}{2}\partial_x e^{2h} = h_x e^{2h} \\ \langle \nabla_x \partial_x, \partial_y \rangle &= -\langle \nabla_x, \nabla_x \partial_y \rangle \\ &= -\langle \partial_x, \nabla_y \partial_x \rangle = -h_y e^{2h}.\end{aligned}$$

D'où

$$\nabla_x \partial_x = h_x \partial_x - h_y \partial_y \ , \ \nabla_y \partial_y = -h_x \partial_x + h_y \partial_y.$$

De même, $\langle \nabla_x \partial_y, \partial_y \rangle = h_x$, donc

$$\nabla_x \partial_y = \nabla_y \partial_x = h_y \partial_x - h_x \partial_y.$$

Donc

$$\begin{aligned}\nabla_x \nabla_y \partial_y &= \nabla_x(-h_x \partial_x + h_y \partial_y) \\ &= -h_{xx}\partial_x - h_x(h_x \partial_x - h_y \partial_y) + h_{xy}\partial_y + h_y(h_y \partial_x + h_x \partial_y) \\ \nabla_y \nabla_x \partial_y &= \nabla_y(h_y \partial_y - h_x \partial_y) \\ &= h_{yy}\partial_x + h_y(h_y \partial_x + h_x \partial_y) + h_{xy}\partial_y + h_x(-h_x \partial_x + h_y \partial_y) \\ \nabla_x \nabla_y \partial_y - \nabla_y \nabla_x \partial_y &= (-h_{xx} - h_{yy})\partial_y.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}K &= \frac{\langle (-h_{xx} - h_{yy})\partial_y, \partial_x \rangle}{e^{4h}} \\ &= -\frac{\Delta h}{e^{2h}}.\end{aligned}$$

2 Soit G un groupe de Lie, dont l'unité est notée 1. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, formée des champs de vecteurs invariants à gauche.

1) Montrons d'abord que tout groupe de Lie G admet une forme volume invariante à gauche : il suffit de prendre ν_1 un générateur de $\Lambda^{\dim G} T_1^* G$ (on note 1 l'unité de G) et de poser $\nu_x = \ell_x^* \nu_1$, où ℓ_x est la multiplication à gauche par x.

Si G est compact, on peut normaliser ν_1 pour avoir $\int_g \nu = 1$. De plus, ν est alors invariante à droite. En effet, ℓ_x et r_y commutent, donc

$$\ell_x^* r_y^* \nu = r_y^* \ell_x^* \nu = r_y^* \nu,$$

donc $r^* \nu$ est invariante à gauche. Comme l'espace des formes invariantes à gauche est isomorphe à $\Lambda^{\dim G} T_1^* G$ donc de dimension un, on a $r_y^* \nu = c(y)\nu$ avec $c(y) \in \mathbb{R}$. Par changement de variables, puisque r_y préserve l'orientation on a

$$\int_g \nu = \int_G r_y^* \nu = c(y) \int_G \nu,$$

donc $c(y) = 1$, c'est-à-dire que ν est invariante à droite.

De même, tout groupe de Lie G admet une métrique riemannienne invariante à gauche : il suffit de prendre $g_1 \in \otimes^2 T^*G$ une forme définie positive (ou produit scalaire euclidien) sur T_1G et de poser $g_x = \ell_x^* g_1$. Si maintenant G est compact, on la rend invariante à droite en posant

$$\widetilde{g} = \int_G (r_y^* g)\nu_y,$$

où ν est une forme volume bi-invariante telle que $\int_G \nu = 1$. En effet, par changement de variables et invariance à droite de ν on a

$$r_z^*\widetilde{g} = \int_G (r_z^* r_y^* g)\nu_y = \int_G (r_{yz}^* g)\nu_y = \int_G (r_y^* g)(r_z^*\nu)_y = \int_G (r_y^* g)\nu_y = \widetilde{r_z^*} g.$$

Elle reste invariante à gauche puisque ℓ_x et r_y commutent :

$$\ell_x * \widetilde{g} = \int_G (\ell_x^* r_y^* g)\nu_y = \int_G (r_y^* \ell_x^* g)\nu_y = \int_G (r_y^* g)\nu_y = \widetilde{g}.$$

2) Soit g une métrique riemannienne invariante à gauche. Alors $g_x = \ell_x^* g_1$ où g_1 est un produit scalaire euclidien sur $T_1G = \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$. Donc

$$(\ell_x^*)^{-1}(r_y^* g)_x = (\ell_x^*)^{-1} r_y^* g_{xy^{-1}} = r_y^*(\ell_x^*)^{-1}\ell_{xy^{-1}}^* g_1 = (\ell_{y^{-1}} r_y)^* g_1.$$

Donc g est invariante à droite ssi $r_y^* \ell_{y^{-1}}^* g_1 = g_1$ pour tout $y \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, soit

$$(\forall v, w \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}))\ r_y^* \ell_{y^{-1}}^* g_1(v, w) = g_1(d(\ell_{y^{-1}} r_y)_1.v, d(\ell_{y^{-1}} r_y)_1) = g_1(v, w).$$

Mais $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, donc chaque espace tangent s'identifie à $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$. Puisque $\ell_y^{-1} r_y z = y^{-1} z y$, on a $d(\ell_{y^{-1}} r_y)_1.v = y^{-1} v y$, donc g est invariante à droite ssi

$$(\forall y \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))\ (\forall v, w \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}))\ g_1(y^{-1} v y, y^{-1} w y) = g_1(v, w).$$

Or si $n \geq 2$ et $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n-2} \end{pmatrix}$, $y_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n-2} \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$, on a

$$y_a^{-1} v y_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Faisant tendre $|a|$ vers l'infini, on a $||y_a^{-1} v y_a|| \to +\infty$ pour n'importe quelle norme, donc il est impossible de trouver un produit scalaire euccidien g_1 sur $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ tel que $g_1(y_a^{-1} v y, y_a^{-1} v y)$ soit indépendant de a. Donc $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ n'a pas de métrique riemannienne bi-invariante.

3) La fonction $g(X, X)$ est invariante à gauche donc constante puisque g et X sont invariantes à gauche. Donc par la formule générale pour la connexion de Levi-Civita on a

$$\begin{aligned}\langle X, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}(Y.g(X, X) + X.g(X, Y) - X.g(X, Y) + \langle Y, [X, Y]\rangle + \langle X, [X, Y]\rangle - \langle X, [X, Y]\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\langle Y, [X, Y]\rangle.\end{aligned}$$

4) Rappelons que si (φ_X^t) est le flot de X on a

$$[X,Y] = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\varphi_X^t)^*Y = -\frac{d}{dt}_{|t=0}(\varphi_Y^t)^*X.$$

Donc

$$g([X,Y],Z) - g(X,[Y,Z]) = g([X,Y],Z) + g([Z,Y],X) = -\frac{d}{dt}_{|t=0} g((\varphi_Y^t)^*X, (\varphi_Y^t)^*Z).$$

Or puisque X est invariant à gauche, $\varphi_X^t = r_{f(t)}$ où $f(t) = \varphi_X^t(1)$. Comme g est invariante à droite, le dernier membre ci-dessus s'annule.

5) Par la formule générale, la constance des produits scalaire de X, Y, Z et 4), on a

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z\rangle &= \frac{1}{2}(Y.Zg(X,Y) + Y.g(X,Z) - X.g(Y,Z) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[X,Z]) - (X,[Y,Z])) \\ &= \frac{1}{2}g(Z,[X,Y]). \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $Z \in \mathfrak{g}$, on a $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$.

6) Si $X \in \mathfrak{g}$, on a $\nabla_X X = 0$, donc les orbites de X sont des géodésiques. Comme chaque vecteur tangent de G peut se prolonger en un champ dans $\mathfrak{g}$, on obtient ainsi toutes les géodésiques.

7) En calculant $R(X,Y)Z$ avec des champs de vecteurs dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y \nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \frac{1}{2}[X, \frac{1}{2}[Y,Z]] - \frac{1}{2}[Y, \frac{1}{2}[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z]. \end{aligned}$$

Par l'identité de Jacobi, ceci vaut

$$\frac{1}{4}[[X,Y],Z] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z].$$

8) En utilisant 4)avec X, Y, Z remplacés par $X, [X,Y], Y$, on a

$$\langle R(X,Y)Y, X\rangle = -\frac{1}{4}[[X,Y],Y],X\rangle = -\frac{1}{4}\langle [X,Y],[Y,X]\rangle = \frac{1}{4}||[X,Y]||^2.$$