Géométrie différentielle 2020-2021

TD8, mercredi 24 mars

Soit Σ une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^3$. On admet qu'elle borde un domaine compact Ω, ce qui permet de définir la normale extérieure $N : \Sigma \to S^2$ qui est continue donc lisse (application de Gauss).

a) Montrer que N est surjective.

b) Montrer que si $\Sigma \subset D^3(x_0, r)$ et $x \in \Sigma \cap S^2(x_0, r)$, alors la courbure $K_\Sigma(x)$ est $\geq \frac{1}{r^2}$.

c) Montrer que

(i) N reste surjective quand on la restreint aux points de courbure ≥ 0

(ii) il y a toujours des points de courbure > 0.

d) En déduire que

$$\int_{\{x\in\Sigma \mid K_\Sigma(x)>0\}} K_\Sigma \sigma\Sigma \geq 4\pi,$$

où $\sigma \in \Omega^2(\Sigma)$ est la forme d'aire sur Σ.

e) Si Σ borde un domaine compact convexe Ω, montrer que $K_\Sigma \geq 0$.

f)* On suppose que $K_\Sigma > 0$. Montrer que N est un difféomorphisme, puis que Σ borde un domaine compact convexe.

f)** On suppose que $K \geq 0$. Montrer que Σ borde un domaine compact convexe.