Géométrie différentielle 2020-2021

Corrigé du TD8

a) Soit $v \in S^2$, on définit la «hauteur dans la direction v» :

$$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto h_v(x) = \langle v, x \rangle.$$

Puisque Σ est compacte h_v a un maximum sur Σ en un point x_v. C'est aussi un maximum de h_v sur Ω, puisque h_v est une submersion donc n'a pas d'extrémum local dans $\mathrm{Int}(\Omega)$. Donc Ω est contenu dans $\{x \mid h_v(x) \leq h_v(x_v)\}$, d'où $N(x_v) = v$.

b) On peut supposer que $x - x_0 = (0, 0, r)$, donc $N(x) = (0, 0, 1)$. Localement, Σ et $S(x_0, r)$ sont des graphes $x_3 = h_\Sigma(x_1, x_2)$ et $x_3 = h_S(x_1, x_2)$, et par hypothèse on a $h_\Sigma \leq h_S$. De plus

$$\begin{aligned} h_S(x, y) &= \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \\ &= r^2(1 - (x_1^2 + x_2^2))^{1/2} \\ &= r(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2}) + o(x_1^2 + x_2^2) \\ &= r - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2r} + o(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$h_\Sigma(x_1, x_2)) = r + \frac{1}{2}\mathrm{II}(x_1, x_2) + o(x_1^2 + x_2^2),$$

où II est la seconde forme fondamentale sur $T_x\Sigma$ dans les coordonnés (x, y), et la courbure est

$$K_\Sigma(x) = \det(\mathrm{II})$$

où II est identifiée à une matrice symétrique.

c) (i) On reprend la preuve de a), et on montre que $K_v(x_v) \geq 0$. On peut supposer que $v = (0, 0, 1)$ donc comme en b) Σ est localement un graphe $x_3 = h_\Sigma(x_1, x_2)$, avec $h_\Sigma \leq h_\Sigma(0, 0)$. Donc la seconde forme fondamentale est ≤ 0, donc

$$K_\Sigma(x) = \det(\mathrm{II}) \geq 0.$$

(ii) Fixons $x_0 \notin \Sigma$. Soit x un point de Σ où la fonction $||x - x_0||$ atteint son maximum, noté r, qui est > 0. Alors $\Sigma \subset D^3(x_0, r)$ et $x \in S^2(x, r)$, donc $K_\sigma(x) \geq \frac{1}{r^2} > 0$.

d) Le point clé est l'identité

$$K_\Sigma \sigma_\Sigma = N^* \sigma_S,$$

où Σ_S est la forme d'aire sur S^2. En effet,

$$K_\Sigma(x) = \det(dN_x : T\Sigma_x \to TS^2_{N(x)}),$$

où le déterminant est défini non pas en utilisant $TS^2_{N(x)}) = T_x\Sigma$ mais le fait que $T_x\Sigma$ et $T_{N(x)}S^2$ sont des plans euclidiens orientés donc munis de détermninants. Donc si $(v_1, v_2$ est une base orthonormée directe de $T\Sigma_x$, on a

$$N^*\sigma_S(v_1, v_2) = \sigma_S(dN_x.v_1, dN_x.v_2) = \det(df_x.v_1, df_x.v_2) = \det(dN_x) = K_\Sigma(x).$$

Donc $N^*\sigma_S = K_\Sigma \sigma_\Sigma$.

Ensuite, on utilise

1) une inégalité liée à la formule de changement de variables : si (M, ν_M) et $N, \nu_N)$ sont des variétés de même dimension munies de formes volumes et si $f \in C^1(M,N)$ avec $f^*\nu_N/\nu_M > 0$ et f surjective, alors

$$\int_M f^*\nu_N \geq \int_N \nu_N.$$

On peut le prouver en décomposant N en un nombre dénombrable (fini si N est compacte) d'ouverts V_i, et M en un nombre dénombrable (fini si M est compacte) d'ouverts $U_{i,j}$, de sorte que

- f induit un difféomorphisme de $U_{i,j}$ sur V_i
- $M \setminus \bigcup_{i,j} U_{i,j}$ et $N \setminus \bigcup_i V_i$ sont Lebesgue-négligeables.

2) La propriété utilisée (dans un autre langage) pour «petit Sard» : $\int_E f^*\omega_N = 0$ si E est Lebesgue-négligeable.

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in\Sigma \mid K_\Sigma(x)>0\}} K_\Sigma \sigma_\Sigma &= \int_{\{x \mid N^*\sigma_S/\sigma_\Sigma>0\}} N^*\sigma_S \\
&\geq \mathrm{aire}(N(\{x\in\Sigma \mid K_\Sigma(x)>0\}) \\
&= \mathrm{aire}(N(\{x\in\Sigma \mid K_\Sigma(x)\geq 0\}) \\
&= \mathrm{aire}(S^2) \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

e) Soit $x \in \Sigma$, alors Ω reste d'un même côté du plan tangent affine $x + T_x\Sigma$ par convexité. En effet, un maximum local pour une fonction affine sur un convexe est toujours un maximum global ; on applique à la fonction h_v où $v = N(x)$. Donc $K_\Sigma(x) \geq 0$ par a).

f)* L'application $N : \Sigma \to S^2$ est un difféomorphisme local. Comme S^2 est simplement connexe, N est un difféomorphisme (on suppose implicitement Σ connexe). Donc pour chaque $v \in S^2$, il existe un unique point $p_v \in \Sigma$ tel que h_v a un maximum en v, et c'est aussi l'unique maximum local. Donc Σ est contenu dans le demi-espace

$$D_v = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, x\rangle \leq \langle v, p_v\rangle\}.$$

De plus si P_v est le plan bordant D_v, on a $\Sigma \cap P_v = \{p_v\}$ pour tout v.

Donc $\Sigma \subset \Omega := \bigcap_{v\in S^2} D_v$, qui est un domaine compact convexe. Notons $\partial\Omega$ sa frontière, il reste à montrer que $\partial\Omega = \Sigma$.

Si $x \in \partial\Omega$ et $P = x + v^\perp$ est un plan d'appui de Ω en x tel que $\Omega \subset \{y \mid \langle v,y\rangle \leq \langle v,x\rangle\}$, alors

$$h_v(x) = \max_\Omega \langle v, y\rangle = \max_\Sigma h_v = \langle v, p_v\rangle.$$

Comme $\Sigma \cap P_v = \{p_v\}$, $x = x_v$ donc $\partial\Omega \subset \Sigma$. Comme $\partial\Omega$ est localement un graphe continu, $\partial\Omega$ est ouvert dans Σ, et il est compact donc fermé, donc $\partial\Omega = \Sigma$ par connexité.

Remarque. Ça doit pouvoir se prouver «à la main», en montrant que Σ est globalement d'un seul côté de chacun de ses plans tangents affines.

f)** **à compléter**