Géométrie différentielle 2020-2021

TD9, mercredi 31 mars

1. Soit g une métrique riemannienne sur $U \subset \mathbb{R}^n$, conforme à la métrique euclidienne, qu'on écrit sous la forme

$$g = \frac{\sum_{i=1}^n dx_i^2}{f(x_1, \cdots, x_n)^2} = \frac{||dx||^2}{f(x)^2}.$$

Montrer que la courbure de g est égale à la constante K si et seulement si on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \ , \ i \neq j$$

$$f(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}) = K + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2.$$

2. Montrer que ceci équivaut à

$$f(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) + F_2(x_2) + \cdots F_n(x_n)$$
$$F_i(x_i) = ai^2 + b_i x_i + c_i$$
$$\sum_{i=1}^n (4ac_i - b_i^2) = K.$$

3. En déduire la formule de Riemann pour l'élément de longueur d'une métrique à courbure constante α (notation de Riemann, seule formule de son Habilitationschrift) :

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \sum x^2} \sqrt{\sum dx^2.}$$

Comparer à la métrique de $S^n(r)$ dans une carte stéréographique, et de $\mathbb{H}^n$ dans le modèle de la boule unité (soit $\frac{4||dx||^2}{(1-||x||^2)^2}$).

2 Soit (M, g) une variété riemannienne telle que $\exp_x$ est un difféomorphisme pour tout $x \in M$. (Ou bien on travaille dans $B_g(x_0, \varepsilon)$ avec $\varepsilon < \frac{1}{2}\mathrm{rayinj}_g(x_0)$).

1) Montrer que si $x, y \in M$, il existe une unique géodésique $\gamma_{x,y} : [0, 1] \to M$ de x à y [constante si $x = y$] et que celle-ci est minimisante. En déduire que $d(p, q)^2 = \displaystyle\int_0^1 ||\gamma'_{x,y}(t)||^2 dt$.

2) Montrer que $\gamma_{x,y}(t)$ est lisse en (x, y, t), et que $d(x, y)^2$ est lisse en x, y.

3) On note tr_x^y le transport parallèle de x à y le long de la géodésique $\gamma_{x,y}$. En utlisant la formule de la variation première, montrer que

$$(\forall w \in T_y M) \ \frac{\partial d}{\partial y}.w = \langle \frac{\mathrm{tr}_x^y(\exp_x^{-1}(y))}{||\mathrm{tr}_x^y(\exp_x^{-1}(y))||}, w\rangle = ||w|| \cos\alpha,$$

où $\alpha \in [0, \pi]$ est l'angle entre $\mathrm{tr}_x^y(\exp_x^{-1}(y))$ et w

4) Si $f \in C^2(M, \mathbb{R})$, on définit $D^2 f_x$ comme la forme bilinéaire symétrique sur $T_x M$:

$$D^2 f_x := D^2(f \circ \exp_x).$$

Si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, montrer que $D^2 f_(X, Y) = X(Yf) - \nabla_X Y$.

5) Avec la formule de la variation seconde, montrer que

$$(\forall w \in T_y M) \ D^2 d(x, .)_y(w, w) = \frac{1}{d(x, y)} \langle w^N, \frac{DJ}{dt}(1) \rangle,$$

où w^N est la composante normale de w sur $\mathrm{tr}_x^y(\exp_x^{-1}(y) = \exp_y^{-1}(x)$ et J est le champ de Jacobi le long de $\gamma_{x,y}$ tel que $J(0) = 0$ et $J(1) = w$. Justifier le fait que J existe et est unique.

6) On suppose que la courbure est négative ou nulle (resp. strictement négative). Montrer que $d(x, .)$ est convexe (resp. strictement convexe) c'est-à-dire que $t \mapsto d(x, \gamma_{y,z}(t))$ est convexe (resp. strictement convexe si $y \neq z$).