Géométrie différentielle 2020-2021

TD10, mercredi 7 avril

1. Soit M une variété riemannienne connexe de dimension $n \geq 3$. On suppose que pour tout $p \in M$, la courbure sectionnelle d'un plan $P \subset T_pM$ est indépendante égale à $K(p)$ ne dépendant que de p. Montrer que K est constante, de la façon suivante :

1) Montrer que $R = KR_0$, où R_0 est le tenseur $(0, 4)$ défini par

$$R_0(X, Y, Z, W) = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle.$$

2) Utiliser la seconde identité de Bianchi

$$\nabla_X R(Y, Z) + \nabla_Y R(Z, X) + \nabla_Z R(X, Y) = 0$$

pour prouver

$$(Z.K)R_0(X, Y, T, U) + (T.K)R_0(X, Y, Z, U) + (U.K)R_0(X, Y, Z, T) = 0.$$

3) Soit (Y, Z, T) orthonormé en p. Montrer que

$$(Z.K)Y - (T.K)Z = 0.$$

4) Montrer que K est constante.

2. Soit M une variété riemannienne, $\gamma : [0, 1] \to M$ une géodésique, et J un champ de Jacobi le long de γ. Montrer qu'il existe $f \in C^\infty([0, 1]\times] - \varepsilon, \varepsilon[, M)$ tel que $f(t, 0) = \gamma$, les $f(., u)$ sont géodésiques, et $\dfrac{\partial f}{\partial u}(t, 0) = J(t)$.

3. Soit M une variété riemannienne à courbure négative ou nulle.

1) Soit $\gamma : [0, b] \to M$ une géodésique, et soit J un champ de Jacobi le long de γ tel que $J(0) = 0$. Montrer que

$$\frac{d}{dt}\langle\nabla_{\dot\gamma} J, J\rangle \geq 0.$$

En déduire que $||J(t)|| \geq t||\nabla_{\dot\gamma} J(0)||$.

2) Montrer que l'exponentielle accroît (au sens large) infinitésimalement les distances :

$$(\forall (x, v) \in TM\ ,\ w \in T_xM)\ ||D\exp_x(v).w|| \geq ||w||.$$

4. On dit qu'une variété riemanienne M est *localement symétrique*.si $\nabla R = 0$.

1) Si M est localement symétrique, montrer que si γ est une géodésique et X, Y, Z sont des champs parallèles le long de γ, $R(X, Y)Z$ est aussi parallèle de long d γ.

2) Montrer qu'une surface localement symétrique est à courbure constante.

3) Si M est une variété à courbure constante, montrer qu'elle est localmeent symétrique.

4) On suppose que M est localement symétrique. Soit $\gamma : I \to M$ une géodésique, telle que $\dot\gamma(0) = v \in T_xM$. Montrer que si J est un champ de vecteurs le long de γ, c'est un champ de Jacobi ssi est l'application

$$J_1 = \mathrm{tr}^x_{\gamma(t)} \circ J : I \to T_xM$$

vérifie l'équation

$$\frac{d^2 J_1}{dt^2} + S_v(J) = 0,$$

où $S_v(w) = R(w, v)v$. Résoudre cette équation