Géométrie différentielle 2020-2021

TD11, mercredi 14 avril

1. 1) Soient M une variété riemannienne complète de dimensiojn n, et soit $\gamma : [0,\ell] \to M^n$ une géodésique, paramétrée par longueur d'arc. On note $(X_1, \cdots, X_{n-1})$ une base des champs de vecteurs normaux et parallèles le long de γ et l'on pose

$$V_i = \sin(\pi \frac{t}{\ell}) X_i \ , \ i = 1, \cdots, n-1.$$

Montrer que la forme d'indice $I = I_0^\ell$ vérifie

$$\sum_{i=1}^{n-1} I_i(V,V) = (n-1) \int_0^\ell \sin^2(\pi \frac{t}{\ell})(\frac{\pi^2}{\ell^2} - \mathrm{Ric}_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)))\ dt.$$

Ici la courbure de Ricci Ric_x est la forme quadratique sur T_xM définie par

$$\mathrm{Ric}_x(v) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(v,e_i)e_i, v\rangle,$$

où (e_i) est une base de $v^\perp \subset T_xM$.

2) On suppose que γ n'a pas de points conjugués. Montrer qu'il existe $t \in [0,\ell]$ tel que $\mathrm{Ric}_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) \leq \frac{\pi^2}{\ell^2}$.

3) Soit $r > 0$, et soit M une variété complète telle que $\mathrm{Ric}_x(v) \geq \frac{||v||^2}{r^2}$ pour tout $(x,v]) \in TM$. Montrer le théorème de Myers :

a) $\mathrm{diam}(M) \leq \pi r$

b) M est compacte

c) $\pi_1(M)$ est fini.