Géométrie différentielle 2020-2021

TD 12, mercredi 28 avril

1. 1) Soit $\gamma : [0,\ell] \to M$ une géodésique paramétrée par longueur d'arc. On rappelle la forme d'indice, définie sur l'espace $\mathcal{V}$ des champs de vecteurs C^1 par morceaux le long de γ qui s'annulent en 0 et en ℓ :

$$I_\ell(X,Y) = \int_0^\ell (\langle \dot{X}, \dot{Y}\rangle - \langle R(X,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y\rangle)dt = -\int_0^\ell \langle \ddot{X} + R(X,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y\rangle dt.$$

1) Montrer que le noyau de I_ℓ est formé des champs de Jacobi qui s'annulent en 0 et en ℓ. En particulier, si γ n'a pas de point

2) Montrer que si $I(X) \geq 0$ pour tout champ normal dans $\mathcal{V}$, alors $I(X) \geq 0$ pour tout champ dans $\mathcal{V}$.

On suppose que γ n'a pas de points conjugués dans $[0,\ell]$.

3) Montrer qu'un champ de vecteurs X le long de γ s'écrit de façon unique

$$Y(t) = \exp_{\gamma(t)} Y(t)\ ,\ Y(t) \in T_pM\ ,\ p = \gamma(0),$$

Y étant de même différentiabilité que X.

4) Si X est normal, montrer que Y est normal.

5) Soit $X \in \mathcal{V}$ normal. de classe C^2 par morceaux. On définit Y comme en 3), puis $\widetilde{Y} = Y/t$ (qui est de classe C^1 par morceaux) et on pose

$$f(t,u) = \exp_p t\frac{tv + uY(t)}{||tv + uY(t)||} = \exp_p t\frac{v + u\widetilde{Y}(t)}{||v + u\widetilde{Y}(t)||}.$$

Montrer que

$$I_\ell(X,X) = \int_0^\ell \frac{d}{du}_{|u=0} \frac{1}{2}\Big|\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\Big|\Big|^2 dt.$$

6) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour $u \to 0$ on a

$$\Big|\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\Big|\Big|^2 \geq 1 + Cu^2||\dot{Y}(t)||^2.$$

Indication : utiliser le lemme de Gauss.

7) Montrer que I_ℓ est définie positive.