Révisions de topologie et un peu d'homotopie

Exercice 1. Quelques exemples d'espaces topologiques inhabituels

1. **Topologie formée par les boules de même centre**. Montrer que la famille des
$$B(0,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\}$$
pour $r \in [,+\infty]$ forme une topologie sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle séparée ? Se compare-t-elle à la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$?

2. **Droite à deux origines**. On considère $D = \mathbb{R}^* \cup \{0_A, 0_B\}$ où 0_A et 0_B sont deux points distincts n'appartenant pas à $\mathbb{R}^*$. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de D de la forme
   - $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $0 < \varepsilon < |x|$.
   - $\{0_A\} \cup (]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\})$ pour $\varepsilon > 0$.
   - $\{0_B\} \cup (]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\})$ pour $\varepsilon > 0$.

   Montrer que $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie. Montrer que cette topologie n'est pas métrisable (raisonner par l'absurde et considérer la distance entre $\{0_A\}$ et $\{0_B\}$. Identifier la topologie induite sur $D \setminus \{0_A, 0_B\}$.

3. **Topologie de Zariski** Soit k un corps et $X = k^n$.
   (a) On considère le cas où $n = 1$. Montrer que les complémentaires des
   $$\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\}$$
   pour $P \in \mathbb{R}[X]$ forment une topologie sur $\mathbb{R}$. Est-elle séparé ?
   (b) Dans le cas général, soit I un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que les complémentaires des
   $$V(I) = \{x \in k^n \mid \forall P \in I, P(x) = 0\}$$
   forment une topologie sur k^n.

Exercice 2. Espaces séparés. On rappelle qu'un espace topologique est séparé si pour toute paire de points distincts (x,y) il existe deux ouverts disjoints U_x et U_y contenant respectivement x et y.

1. Démontrer que si X est séparé, les singletons de X sont fermés.

2. Montrer que X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$. En déduire que si Y est séparé et si $f : X \to Y$ est continue, son graphe est fermé dans $X \times Y$. Que pensez vous de la réciproque ? Et dans le cas où Y est compact ? Que se passe-t-il si Y n'est pas séparé ?

3. Soit $(P, \leqslant)$ un ensemble partiellement ordonné. Pour $x \in P$, on introduit la partie
$$D_x = \{y \in P \mid y \geqslant x\}.$$
Montrer que les D_x forment la base d'une topologie. On l'appelle *topologie droite* sur P. Montrer qu'une intersection d'ouvert est ouverte. Déterminer l'adhérence du singleton $\{x\}$.

4. Montrer qu'un ensemble muni de la topologie droite vérifie que pour toute paire de points distincts il existe un ouvert contenant un des deux points et pas l'autre. Un tel espace est-il séparé en général ?

Exercice 3. Topologie quotient. Soit X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Soit $\pi : X \to X/\sim$ la projection canonique.

1. Énoncer et démontrer la propriété universelle de la topologie quotient.
2. Montrer que si X est connexe $X/\sim$ est connexe. Même question avec connexe par arcs.
3. Montrer que si $X/\sim$ est séparé alors le graphe $X \sim X := \{(x, y) \mid x \sim y\}$ est fermé dans $X \times X$. Montrer que la réciproque est vraie si l'on suppose que π est une application ouverte.
4. Montrer que si X est compact alors $X/\sim$ est compact si et seulement si le graphe $X \sim X$ est fermé.
5. Donner un exemple d'espace separé X et de relation $\sim$ tels que $X/\sim$ soit muni de la topologie grossière. Donner un exemple d'espace non-separé tel que $X/\sim$ soit séparé.

Exercice 4. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 5. Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que deux applications $f, g : X \to Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \to Y$ telle que $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = g$.

1. Soit $\mathbb{S}^1$ le cercle unité. Montrer que $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ telles que $f(x) = x$ et $g(x) = -x$ sont homotopes.
2. Montrer que l'identité de $\mathbb{R}^n$ est homotope à l'application nulle.
3. Donnez deux applications que vous pensez non homotopes (et expliquer pourquoi).

Exercice 6. Soit $f : X \to Y$ une application continue. On dit que f est une *équivalence d'homotopie* s'il existe $g : Y \to X$ telle que $f \circ g$ est homotope à id_Y et $g \circ f$ est homotope à id_X. On dit alors que X et Y sont *homotopiquement équivalents*.

1. Montrer que l'application $\{0\} \to [0, 1]$ est une équivalence d'homotopie.
2. Montrer qu'un cylindre est homotopiquement équivalent à un cercle.