Dualité de Poincaré, orientabilité

Exercice 1.
Montrer que retirer un point d'une variété de dimension au moins 2 n'affecte pas son orientabilité.

Exercice 2.
Soit M une variété topologique de dimension n.
On définit le *fibré des orientations* de M :

$$OM = \{(x, \mu) \mid x \in M, \mu \text{ est un générateur de } \mathrm{H}_n(M, M \setminus \{x\})\}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique structure de variété topologique sur OM telle que la première projection $OM \to M$ est un revêtement à deux feuillets. Montrer que si M est de plus supposée lisse, OM est lisse.
2. Montrer que OM est toujours orientable.
3. Montrer que M est orientable si et seulement si OM n'est pas connexe et que dans ce cas OM est homéomorphe à la réunion disjointe de deux copies de M.
4. En déduire qu'une variété simplement connexe (ou plus généralement dont le groupe fondamental n'a pas de sous-groupe d'indice 2) est orientable.

Exercice 3. Soit M une variété orientable de dimension n. Choisissons $(\mu_x)_{x\in M}$ une orientation de M. Soit f un homéomorphisme de M.

1. Montrer que la famille $(f_*(\mu_x))_{x\in M}$ est encore une orientation de M, *i.e.*
$$(f_*(\mu_x))_{x\in M} \in \{(\mu_x)_{x\in M}; (-\mu_x)_{x\in M}\}.$$
Si $(f_*(\mu_x))_{x\in M} = (\mu_x)_{x\in M}$, on dit que f *préserve l'orientation de* M.
2. Montrer que si M est compacte, f préserve l'orientation de M si et seulement si $f_*([M]) = [M]$. En déduire quand l'application antipodale $S^n \to S^n$ préserve l'orientation.
3. Montrer que si G est un groupe discret muni d'une action propre et totalement discontinue par homéomorphismes préservant l'orientation de M, le quotient M/G est orientable. En déduire une nouvelle démonstration du fait que $\mathbb{RP}^{2n+1}$ est orientable.

Exercice 4.
Décrire une classe fondamentale de Σ_g et de S^n. Déduire de l'exercice précédent une classe fondamentale de $\mathbb{RP}^{2n+1}$.

Exercice 5.
Soit M et N deux variétés compactes sans bord orientables de dimension n. On sait (par exemple par dualité de Poincaré) que $\mathrm{H}_n(M) = \mathbb{Z}[M]$ et que $\mathrm{H}_n(N) = \mathbb{Z}[N]$. On appelle *degré* de $f : M \to N$ l'entier d tel que $f_*([M]) = d[N]$. Montrer que toute variété M compacte sans bord orientable de dimension n est munie d'une application de degré 1

$$M \to S^n.$$

Exercice 6. (Variétés de dimension 3).

1. Soit M une variété compacte simplement connexe orientable de dimension 3. Calculer les groupes de cohomologie de M.
2. Soit M une variété compacte orientable de dimension 3. On écrit
$$\mathrm{H}_1(M) = \mathbb{Z}^r \oplus F$$
avec F un groupe fini. Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de M.

Exercice 7.

Soit M une variété compacte connexe orientable de dimension n. Montrer que $\mathrm{H}_{n-1}(M)$ est sans torsion.

Exercice 8.

Soit M une variété connexe compacte non-orientable. Montrer que

$$\mathrm{H}_n(M;\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } m \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En déduire que le groupe de torsion de $\mathrm{H}_{n-1}(M)$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 9.

Soit M une variété connexe compacte non-orientable de dimension 3. On écrit

$$\mathrm{H}_1(M) = \mathbb{Z}^r \oplus F$$

avec F un groupe fini.

1. Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de M.
2. En déduire que $\mathrm{H}_2(M) = \mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (en particulier $r > 1$).
3. En déduire que le groupe fondamental de M est infini.

Exercice 10.

Soit X une variété compacte connexe de dimension n. Montrer que l'on a des isomorphismes induits par le choix d'une classe fondamentale :

$$\mathrm{H}_i(X,\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{H}^i(X,\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{H}_{n-i}(X,\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{H}^{n-i}(X,\mathbb{Q}).$$

Exercice 11.

Montrer qu'en choisissant une classe fondamentale, le cup produit induit un produit appelé *produit d'intersection*

$$\mathrm{H}_k(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathrm{H}_{n-k}(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}.$$

Soit M une sous-variété de dimension k de X. On note encore $[M]$ l'image d'une classe fondamentale de M dans $\mathrm{H}_k(X,\mathbb{Z})$.

Si M et N sont deux sous-variétés de X, de dimension k et $n-k$ respectivement. On appelle *nombre d'intersection de M* et N l'image de $[M] \otimes [N]$ par le produit d'intersection.

Calculer le nombre d'intersection de deux cercles qui se coupent transversalement dans un tore. On peut en fait montrer que si X est une variété lisse, le nombre d'intersection de deux sous-variétés qui se coupent "transversalement" est le nombre de points d'intersections des deux sous-variétés, comptés avec un certain signe.

Les applications de ce fait sont innombrables. Le théorème des points fixes de Lefschetz en est un exemple :

Théorème 1 *Soit X une variété lisse de dimension d et $f : X \to X$ lisse dont les points fixes sont isolés, et non-dégénérés (i.e. si p est un point fixe, $\mathrm{Id} - df_p : T_pX \to T_pX$ est inversible. On note alors $\varepsilon(p)$ le signe de son déterminant). Alors,*

$$|\operatorname{Fix}(f)| := \sum_{f(p)=p} \varepsilon(p) = \sum_{i=0}^{d} \operatorname{Tr}(f_* : \mathrm{H}_i(X,\mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_i(X,\mathbb{Q})).$$