

Homologie à coefficients, cohomologie

Exercice 1.

Soit M un groupe abélien. Calculer l'homologie à coefficients dans M des espaces suivants :

1. $\mathbb{C}P^n$.
2. $\mathbb{R}P^n$.
3. La surface orientable de genre g , Σ_g .
4. La surface non orientable de genre g , Σ'_g .

Exercice 2.

Soit M un groupe abélien.

1. Calculer la cohomologie à coefficients dans M de S^n en utilisant Mayer-Vietoris.
2. Soit X un espace topologique. Soit A un fermé de X qui est un rétracte par déformation forte d'un ouvert U le contenant. Montrer que

$$H^n(X, A; M) = \tilde{H}^n(X/A; M).$$

On pourra admettre (ou démontrer !) la version relative de la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients dans M .

3. Soit X un CW-complexe. Calculer la cohomologie relative $H^n(X^k, X^{k-1}; M)$.
4. Calculer la cohomologie à coefficients dans M des espaces du premier exercice. On pourra admettre que le complexe dual du complexe $C_*^{CW}(X)$ calcule la cohomologie de X .

Exercice 3.

Soit $f : S^n \rightarrow S^n$ de degré d . Montrer que l'application induite par f en cohomologie est la multiplication par d .

Exercice 4.

Soit X un graphe fini connexe de genre g (i.e. g est le rang de $H_1(X; \mathbb{Z})$) qui n'a pas de sommet d'arité 1. Le groupe des automorphismes de $H_1(X; \mathbb{Z})$ est alors $GL_g(\mathbb{Z})$.

Soit G un groupe fini d'homéomorphismes de X . Montrer que l'application

$$\Psi : \begin{cases} G & \rightarrow GL_g(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto H_1(f) \end{cases}$$

est injective. Montrer qu'il en est de même si l'on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour $m > 2$. Que se passe-t-il si $m = 2$?

Exercice 5.

Soit X un espace topologique. De la suite exacte

$$0 \rightarrow C_*(X) \xrightarrow{\times n} C_*(X) \rightarrow C_*(X; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

déduire que l'on a une suite exacte courte pour tout i :

$$0 \rightarrow H_i(X)/n \rightarrow H_i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow n - \text{torsion}(H_{i-1}(X)) \rightarrow 0.$$