Cup-produit

Exercice 1.
Soit R un anneau et X un espace topologique connexe par arcs. Décrire le cup produit

$$\smile : \mathrm{H}^0(X,R) \times \mathrm{H}^i(X,R) \to \mathrm{H}^i(X,R).$$

Exercice 2.
Soit R un anneau. Calculer l'anneau $\mathrm{H}^*(S^n,R)$ (avec pour multiplication le cup-produit).

Exercice 3.
Un *complexe simplicial abstrait* est une paire $K=(V,\Sigma)$ où V est un ensemble appelé *ensemble des sommets* et Σ un ensemble de parties finies de V appelées *faces* tels que

- $\forall \sigma \in \Sigma, \forall \tau \subseteq \sigma, \tau \in \Sigma$.
- Les singletons sont dans Σ.

Étant donné un complexe simplicial abstrait (V,Σ), sa *réalisation géométrique* $|K|$ comme suit :

- Si $\sigma \in \Sigma$, on note
$$\Delta_\sigma = \left\{ \sum_{v\in\sigma} a_v[v] \mid a_v \in [0,1], \sum_{v\in\sigma} a_v \right\} \subseteq [0,1]^\sigma$$
On munit alors Δ_σ de la topologie induite par celle de $[0,1]^\sigma$, ce qui fournit un homéomorphisme $\Delta_\sigma \approxeq \Delta^{|\sigma|-1}$.
- On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur l'union disjointe des Δ_σ : si $\tau \subseteq \sigma$ et $\sum\limits_{v\in\sigma} a_v[v] \in \Delta_\sigma$ est tel que $a_v = 0$ si $v \notin \tau$, alors
$$\sum_{v\in\sigma} a_v[v] \sim \sum_{v\in\tau} a_v[v].$$
- On définit alors $|K| = \bigsqcup\limits_{\sigma\in\Sigma} \Delta_\sigma / \sim$

Un *complexe simplicial* est alors un espace topologique homéomorphe à la réalisation géométrique d'un complexe simplicial abstrait.

1. Constater qu'un graphe est un cas particulier de complexe simplicial abstrait. Retrouver le calcul de l'homologie des graphes donné lors du TD 3.
2. Expliquer pourquoi un complexe simplicial est un cas particulier de CW-complexe. Soit X un complexe simplical homéomorphe à la réalisation géométrique d'un complexe simplicial abstrait (V,Σ). Soit $C_*^{\mathrm{simp}}(X)$ le complexe cellulaire associé. Le décrire explicitement en fonction de Σ. Montrer que c'est un sous-complexe du complexe $C_*(X)$.
3. On note $C^*_{\mathrm{simp}}(X,R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*^{CW}(X),R)$ le complexe cellulaire associé. Le décrire explicitement.
4. Montrer que $C^*_{\mathrm{simp}}(X,R)$ est un sous-complexe de $C^*(X,R)$.
5. En déduire que pour calculer le cup produit
$$\mathrm{H}^n(X,R) \times \mathrm{H}^m(X,R) \to \mathrm{H}^{n+m}(X,R)$$
il suffit de décrire l'application $C^n_{\mathrm{simp}}(X,R) \times C^m_{\mathrm{simp}}(X,R) \to C^{n+m}_{\mathrm{simp}}(X,R)$.

Exercice 4.
Soit $g \geq 1$ un entier. Le but de cet exercice est de comprendre le cup-produit sur la surface orientable de genre g (notée Σ_g) pour la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Rappeler la valeur des groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de Σ_g.
2. Expliquer pourquoi le seul produit "intéressant" est le produit

$$\smile : \mathrm{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \times \mathrm{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(\Sigma_g, \mathbb{Z}).$$

3. On rappelle que la surface de genre g peut être décrite comme un $4g$-gone $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$. Montrer que l'on obtient une triangulation de Σ_g en considérant les $4g$ triangles dont les sommets sont le centre du $4g$-gone et les deux sommets d'une arête.
4. On sait que la famille $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ forme une base de $\mathrm{H}_1(X)$. Par le théorème des coefficients universels, $\mathrm{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(\Sigma_g), \mathbb{Z})$. On a donc une base α_i, β_i de $\mathrm{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ duale de la base a_i, b_i.

   Construire des cocycles ϕ_i et ψ_i de $C^1_{\mathrm{simp}}(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ tels que $\phi_i(a_j) = \delta_{i,j}$, $\phi_i(b_j) = 0$, $\psi_i(a_j) = 0$ et $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.
5. Décrire le cup produit sur la cohomologie de Σ_g à coefficient dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5.

Appliquer la méthode de l'exercice précédent à la surface non orientable de genre g pour caluler le cup-produit sur sa cohomologie à coefficents dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 6.

Soit X l'espace topologique obtenu en recollant une 2-cellule à S^1 au moyen de l'application $z \mapsto z^m$.

1. Calculer la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de X.
2. Montrer que X a une structure de complexe simplicial en décrivant X comme un m-gone dont on recolle tous les sommets.
3. Appliquer à X la méthode des exercices précédents pour caluler le cup-produit sur sa cohomologie à coefficents dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.