SOLUTIONS DE L'EXAMEN – 29 avril 2024

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (On ne demande pas de justification).

(a) Soit M une variété de dimension n, avec ou sans bord. Si $H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ pour tout $x \in M$, alors le bord ∂M est vide.

(b) Il existe une variété M orientée, connexe et non-compacte de dimension n telle que $H^n(M;G) \ncong \mathrm{Ext}(H_{n-1}(M), G)$ pour un certain groupe abélien G.

(c) Toute variété fermée et connexe de dimension $n > 0$ est non contractile.

(d) Il existe une application continue $f : S^4 \to S^4$ qui est paire (c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in S^4$) et de degré $\deg(f) \neq 0$.

(e) Pour toute variété fermée, connexe et orientable de dimension $n > 0$, et pour tout $x \in M$, le groupe de cohomologie $H^n(M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ est trivial.

Solution.

(a) Vrai. Si $\partial M \neq \varnothing$, alors tout point $x \in \partial M$ a un voisinage ouvert $U \subset M$ et un homéomorphisme

$$\phi : U \to \mathbb{R}^n_+ := \big\{ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \;\big|\; y_n \geq 0 \big\}$$

tel que $\phi(x) = 0$. Par conséquent, en utilisant l'excision et puisque l'inclusion $\mathbb{R}^n_+ \setminus 0 \hookrightarrow \mathbb{R}^n_+$ est une équivalence d'homotopie, nous concluons que

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}) \cong 0.$$

(b) Faux. Si M est une variété orientée, connexe et non compacte de dimension n, le théorème de dualité de Poincaré implique

$$H_n(M) \cong H^0_{\mathrm{c}}(M;\mathbb{Z}) \cong \varinjlim_K H^0(M, M \setminus K; \mathbb{Z}) = 0.$$

Par le théorème des coefficients universels, nous déduisons que

$$H^n(M;G) \cong \mathrm{Ext}(H_{n-1}(M), G).$$

(c) Vrai. Si M est une variété fermée, connexe de dimension $n > 0$, par le théorème de dualité de Poincaré nous avons $H^n(M;\mathbb{Z}_2) \cong H_0(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. En revanche, la cohomologie d'un espace contractile est triviale en tout degré $d > 0$.

(d) Faux. Pour chaque dimension paire $2n > 0$, une application continue paire $f : S^{2n} \to S^{2n}$ se factorise à travers $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, c'est-à-dire

$$\begin{tikzcd} S^{2n} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & S^{2n} \end{tikzcd}$$

où $\tilde{f}([x]) = f(x) = f(-x)$, et $\pi(x) = [x]$ est la projection au quotient. Puisque $H_{2n}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n}) = 0$, nous en déduisons que $\deg(f) = 0$.

(e) Vrai. En effet, nous savons que pour une variété fermée, connexe et orientable M, l'inclusion induit un isomorphisme

$$i_* : H_n(M) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M \setminus \{x\}),$$

et donc aussi un isomorphisme

$$i^* : \mathrm{Hom}(H_n(M, M \setminus \{x\}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(H_n(M), \mathbb{Z}).$$

Le théorème de dualité de Poincaré implique

$$H^n(M; \mathbb{Z}) \cong H_0(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Comme $H_n(M) \cong H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$, on a aussi

$$\mathrm{Hom}(H_n(M), \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_n(M, M \setminus \{x\}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Par le théorème des coefficients universels, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i^*"] & \mathrm{Hom}(H_n(M, M \setminus \{x\}), \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "i^*", "\cong"'] & 0 \\ H^n(M; \mathbb{Z}) \arrow[r, "b"] & \mathrm{Hom}(H_n(M), \mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les lignes horizontales sont exactes. Comme les homomorphismes a et b sont surjectifs, ils sont des isomorphismes. Donc

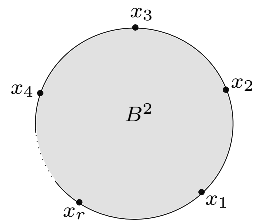
$$i^* : H^n(M, M \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} H^n(M)$$

est également un isomorphisme. Nous savons également que $H^{n+1}(M, M \setminus \{x\}) = 0$. Par conséquent, la suite exacte longue

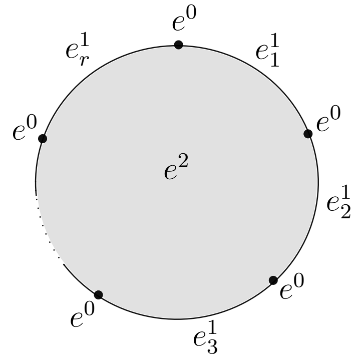
$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & H^n(M, M \setminus \{x\}) \arrow[r, "i^*", "\cong"'] & H^n(M) \arrow[r] & H^n(M \setminus \{x\}) \arrow[r, "\delta^*"] & H^{n+1}(M, M \setminus \{x\}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ldots \\ & & & & 0 & \end{tikzcd}$$

implique que $H^n(M \setminus \{x\})$ s'annule.

Exercice 2. Calculer l'homologie singulière $H_*(B^2/\{x_1, ..., x_r\})$, où B^2 est le disque compact et $x_1, ..., x_r$ sont des points distincts sur la frontière ∂B^2.



Solution. Le quotient $B^2/\{x_1, ..., x_r\}$ est un CW-complexe avec une 0-cellule $e_0 = x_i$, des 1-cellules $e^1_1, ..., e^1_r$, et une 2-cellule e^2.



Nous avons le complexe de chaînes cellulaires suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \xrightarrow{\delta_3} & C_2 & \xrightarrow{\delta_2} & C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0 & \xrightarrow{\delta_0} & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & \langle e^2 \rangle & & \langle e^1_1, ..., e^1_r \rangle & & \langle e^0 \rangle & & \end{array}$$

où

$$\delta_2(e^2) = e^1_1 + ... + e^1_r, \qquad \delta_1(e^1_i) = e^0 - e^0 = 0.$$

Par le théorème d'homologie cellulaire, nous concluons

$$H_d(B^2/\{x_1, ..., x_r\}) = \frac{\ker \delta_d}{\mathrm{im}\delta_{d+1}} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & d = 0, \\ \mathbb{Z}^{r-1}, & d = 1, \\ 0, & d \geq 2. \end{cases}$$

Exercice 3. Existe-t-il une application continue $f : S^4 \to S^2 \times S^2$ qui induit un isomorphisme $f^* : H^4(S^2 \times S^2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^4(S^4; \mathbb{Z})$?

Solution. Une telle application n'existe pas. En effet, le théorème de Künneth implique que $H^4(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par $\omega \times \omega = p_1^*\omega \smile p_2^*\omega$, où ω est un générateur de $H^2(S^2)$, et les applications $p_i : S^2 \times S^2 \to S^2$ sont les projections $p_i(x_1, x_2) = x_i$. Si $f : S^4 \to S^2 \times S^2$ est une application continue, nous avons

$$f^*(\omega \times \omega) = f^*(p_1^*\omega) \smile f^*(p_2^*\omega) = 0,$$

car $f^*(p_i^*\omega) \in H^2(S^4) = 0$.

Exercice 4. Soit U l'union d'un nombre fini de sous-ensembles ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$. L'homologie singulière $H_*(U) = \oplus_{k\geq 0} H_k(U)$ est-elle un groupe de type fini ?

Solution. L'affirmation est vraie. Pour $n = 0$, c'est évident, donc considérons le cas $n > 0$. Par la dualité de Poincaré, tout sous-ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ satisfait

$$H_k(U) \cong H_{\mathrm{c}}^{n-k}(U) \cong 0, \quad \forall k \geq n.$$

Montrons que toute union finie $U = U_1 \cup ... \cup U_r$ de sous-ensembles convexes ouverts $U_i \subset \mathbb{R}^n$ a des groupes d'homologie $H_k(U)$ de type fini en chaque degré $k < n$. En effet, c'est vrai pour $r = 1$, puisque les ensembles convexes sont contractiles. Supposons par récurrence que c'est vrai pour les unions d'au plus $r-1$ sous-ensembles convexes ouverts. Soient $U_1, ..., U_r \subset \mathbb{R}^n$ des sous-ensembles convexes ouverts, et posons $U' := U_1 \cup ... \cup U_{r-1}$. L'intersection $U' \cap U_r = (U_1 \cap U_r) \cup ... \cup (U_{r-1} \cap U_r)$ est encore l'union de $r-1$ sous-ensembles convexes ouverts. Par conséquent, $H_k(U')$, $H_k(U_r)$ et $H_{k-1}(U' \cap U_r)$ sont de type fini. La suite exacte de Mayer-Vietoris

$$... \longrightarrow H_k(U') \oplus H_k(U_r) \xrightarrow{\iota} H_k(U) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(U' \cap U_r) \longrightarrow ...$$

peut être tronquée, produisant une suite exacte

$$... \longrightarrow H_k(U') \oplus H_k(U_r) \xrightarrow{\iota} H_k(U) \xrightarrow{\partial_*} \mathrm{im}(\partial_*) \longrightarrow 0$$

Le groupe abélien $\mathrm{im}(\partial_*)$ est de type fini, étant un sous-groupe du groupe abélien de type fini $H_{k-1}(U' \cap U_r)$. Si $g_1, ..., g_s$ sont un ensemble de générateurs de $H_k(U') \oplus H_k(U_r)$, $h_1, ..., h_q$ sont un ensemble de générateurs de $\mathrm{im}(\partial_*)$, et nous fixons $k_i \in \partial_*^{-1}(h_i)$, alors $\iota(g_1), ..., \iota(g_s), k_1, ..., k_q$ sont un ensemble de générateurs de $H_k(U)$.

Exercice 5. Soit X un espace topologique connexe et non vide, et $\alpha \in H^d(X;\mathbb{Z})$ une classe de cohomologie non nulle. Pour tout sous-espace $Y \subset X$, on indique par $i_Y : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion, et on pose

$$c(Y) := \inf\{k \geq 0 \mid i_Y^* \alpha^k = 0\},$$

où $\alpha^k = \alpha \smile ... \smile \alpha$ (k fois) si $k > 0$, α^0 est le générateur de $H^0(X;\mathbb{Z})$, et nous adoptons la convention habituelle $\inf \varnothing = \infty$. Est-il vrai que, pour toute paire d'ouverts $U, V \subset X$, on a l'inégalité triangulaire suivante ?

$$c(U \cup V) \leq c(U) + c(V)$$

Prouver-la, ou fournir un contrexemple.

Solution. L'inégalité est vrai. Posons $u := c(U)$ et $v := c(V)$. Si $u = \infty$ ou $v = \infty$, l'inégalité est verifiée. Supposons que $u < \infty$ et $v < \infty$. Alors $\alpha^u \in H^*(X, U;\mathbb{Z})$ et $\alpha^v \in H^*(X, V;\mathbb{Z})$. Le cup-produit $\alpha^{u+v} = \alpha^u \smile \alpha^v$ est une classe de cohomologie relative dans $H^*(X, U\cup V;\mathbb{Z})$, ce qui implique $\iota_{U\cup V}^* \alpha^{u+v} = 0$ dans $H^*(U\cup V;\mathbb{Z})$, et donc $c(U\cup V) \leq u+v$.

Exercice 6. Soit M une variété orientable fermée de dimension paire $2n > 0$, telle que $H_{n-1}(M)$ est un groupe abélien libre. Que peut-on déduire sur le sous-groupe de torsion $H_n(M)_{\mathrm{tor}}$?

Solution. Par la dualité de Poincaré et le théorème des coefficients universels, nous avons des isomorphismes

$$H_n(M) \cong H^n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_n(M), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(H_{n-1}(M), \mathbb{Z}).$$

Le groupe $\mathrm{Hom}(H_n(M), \mathbb{Z})$ est sans torsion, et donc

$$H_n(M)_{\mathrm{tor}} \cong \mathrm{Ext}(H_{n-1}(M), \mathbb{Z})_{\mathrm{tor}}.$$

Puisque $H_{n-1}(M)$ est un groupe abelien libre, on a

$$\mathrm{Ext}(H_{n-1}(M), \mathbb{Z}) = 0.$$

et on conclut que $H_n(M)_{\mathrm{tor}} = 0$.

Exercice 7. Soit M une variété fermée, connexe et orientable de dimension $n > 0$. Existe-t-il une application continue $f : M \to S^n$ qui induit un homomorphisme injectif

$$f^* : H^*(S^n; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^*(M; \mathbb{Z})$$

en cohomologie ?

Solution. Soit $B \subset M$ une boule ouverte dont la fermeture est homéomorphe à une boule compacte de dimension n. Fixons un point arbitraire $y_0 \in S^n$, et une application continue $f : M \to S^n$ telle que $f|_{M \setminus B} \equiv y_0$, et la restriction $f|_{\mathrm{int}(B)} \to S^n \setminus \{y_0\}$ soit un homéomorphisme. Montrons que f induit un homomorphisme injectif en cohomologie.

Fixons un point $x_1 \in B$ et son image $y_1 = f(x_1) \in S^n \setminus \{y_0\}$. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(S^n, \{y_0\}) & \xrightarrow{\cong} & H^*(S^n, S^n \setminus \{y_1\}) \\ \downarrow f^* & & \cong \downarrow f^* \\ H^*(M, M \setminus B) & \xrightarrow{\cong} & H^*(M, M \setminus \{x_1\}) \end{array}$$

où les isomorphismes horizontaux sont induits par les inclusions. Nous en déduisons que

$$f^* : H^*(S^n, \{y_0\}) \xrightarrow{\cong} H^*(M, M \setminus B)$$

est également un isomorphisme. Nous considérons le morphisme des suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & H^n(S^n, \{y_0\}) & \longrightarrow & H^n(S^n) & \longrightarrow & H^n(\{y_0\}) & \longrightarrow & \ldots \\ & & \cong \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \\ \ldots & \longrightarrow & H^n(M, M \setminus B) & \longrightarrow & H^n(M) & \longrightarrow & H^n(M \setminus B) & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

Puisque $H^n(\{y_0\})$ et $H^n(M \setminus B)$ sont triviaux (car $M \setminus B$ est homotopiquement équivalents à $M \setminus \{x_1\}$), le diagramme implique que $f^* : H^n(S^n) \to H^n(M)$ est surjectif. Puisque M et S^n sont tous deux des variétés fermées orientables de dimension n, la dualité de Poincaré implique que $H^n(M) \cong H^n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Par conséquent, $f^* : H^n(S^n) \to H^n(M)$ est un isomorphisme. En degré zéro, $f^* : H^0(S^n) \to H^0(M)$ est également un isomorphisme. Dans chaque degré $d \notin \{0, n\}$, la cohomologie $H^d(S^n)$ s'annule, et donc $f^* : H^d(S^n) \hookrightarrow H^d(M)$ est injectif.

Exercice 8. Déterminez tous les groupes G qui agissent de manière continue (c'est-à-dire que $x \mapsto g \cdot x$ est continu pour tout $g \in G$) et librement (c'est-à-dire que $g \cdot x \neq x$ pour tout $x \in S^{2n}$ et $g \in G \setminus \{e\}$) sur une sphère de dimension paire S^{2n}.
Suggestion : Utiliser le degré topologique.

Solution. L'action du groupe définit un homomorphisme

$$\psi : G \to \mathbb{Z}, \qquad \psi(g) = \deg(\rho_g),$$

où $\rho_g : S^{2n} \to S^{2n}$, $\rho_g(x) = g \cdot x$. Pour chaque $g \in G \setminus \{e\}$, puisque ρ_g n'a pas de points fixes, elle est homotope à l'application antipodale $x \mapsto -x$ via l'homotopie

$$h_t(x) = \frac{-tx + (1-t)\rho_g(x)}{\| - tx + (1-t)\rho_g(x)x\|}.$$

Par conséquent, elle a un degré $\deg(\rho_g) = -1$. Cela implique que ψ est injective et prend des valeurs dans le sous-groupe $\{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$. Les seuls groupes qui s'injectent dans $\mathbb{Z}_2$ sont $\mathbb{Z}_2$ et le groupe trivial $\{e\}$. Enfin, $\mathbb{Z}_2$ agit sur des sphères de n'importe quelle dimension par $\rho_{-1}(x) = -x$.