Toute metrique riemannienne est localement euclidienne à l'ordre 1

$q \in M$, $e_1, .., e_n \in T_qM$ base orthonormale

coordonnées loc. $x_1, \dots, x_n$ centrée en q :

$$x_1, \dots, x_n \longmapsto \exp_q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$$

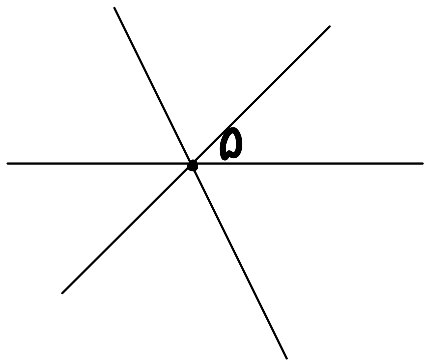
(coordonnées normales géodesiques)

en ces coordonnés

$$
\begin{aligned}
g_{ij}(q) &= g_q(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) \\
&= g_q(d\exp_q(0)\, e_i, d\exp_q(0)\, e_j) \\
&= g_q(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$g_q = dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n$$

les geodesiques qui passent par q, en ces coordonnés, sont les droites qui passent par $0 \in \mathbb{R}^n$



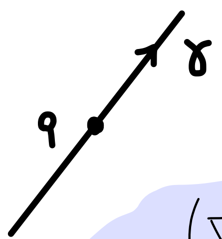
γ geod tq $\gamma(0) = q$

$$\Rightarrow \gamma(t) = (tv_1, \dots, tv_n)$$

Prop. $\Gamma_{ij}^{k}(q) = 0$, $dg_{ij}(q) = 0$

Preuve

γ géodésique arbitraire tq $\gamma(0) = q$



$$\Rightarrow \ddot{\gamma}^k \equiv 0 \quad \forall k$$

$(x^i \circ \gamma =: \gamma^i)$

eq géodésique : $(\nabla_t \dot{\gamma} \equiv 0)$

$$0 = \underbrace{\ddot{\gamma}^k}_{=0} + \sum_{i,j} \gamma^i \gamma^j \, \Gamma_{ij}^{k}(\gamma) \qquad \forall k = 1, \dots, n$$

en $q = \gamma(0)$ on a : $\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^{k}(q) v^i v^j = 0$ où $v = \gamma(0)$

En choisissant v tq $v^i = v^j = 1$, $v^k = 0 \ \forall k \neq i,j$

on a $\Gamma_{ij}^k(q) = 0$

On a prouvé. $\Gamma_{ij}^k(q) = 0 \quad \forall i,j,k$.

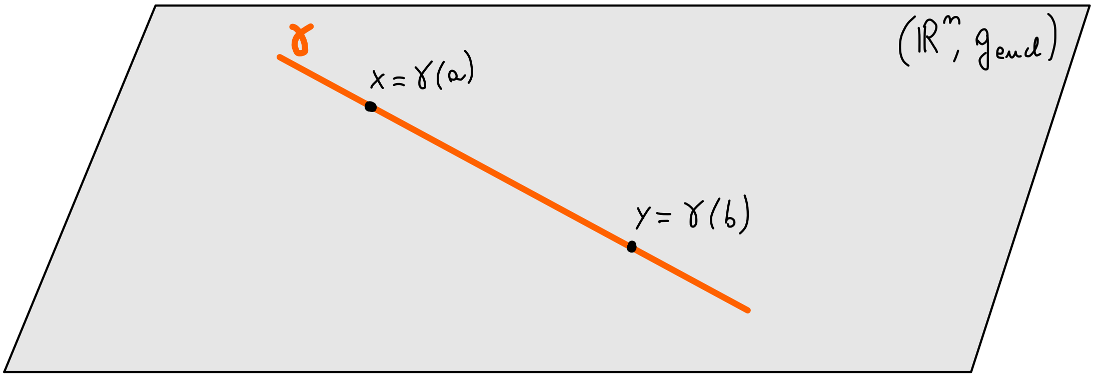
$$\partial_{x^i} g_{jk}(q) = \partial_{x^i}\left(g\left(\partial_{x^j}, \partial_{x^k}\right)\right)\Big|_q$$

$$= g\Big(\underbrace{\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j}}_{=0}, \partial_{x^k}\Big)\Big|_q + g\Big(\partial_{x^j}, \underbrace{\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^k}}_{=0}\Big)\Big|_q$$

$$= 0$$

$\square$

THÉORIE VARIATIONNELLE DES GÉODÉSIQUES



Les géodesiques euclidienne sont les droîtes
Elle sont aussi le courbes plus courtes entre
deux points. $\quad \text{longueur}\left(\gamma|_{[a,b]}\right) = \|x-y\| = d(x,y)$

Et dans une variété riemannienne ?

(M^n, g) variété riemannienne connexe

$\gamma \quad [a,b] \longrightarrow M \qquad C^\infty$ par morceaux, et C^0

$\left(a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \quad \text{t.q.} \quad \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \ C^\infty \right)$

longueur de γ $\qquad L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_g \, dt$

(bien définie pour γ absolument continue)

Rmq $L(\gamma)$ est indépendante de la paramétrisation de γ

$$\left(\begin{array}{l} \tau : [c,d] \xrightarrow{\cong} [a,b] \quad \text{diffeo} \\ \zeta := \gamma \circ \tau \\ L(\zeta) = \int_c^d \|\dot\gamma(\tau(s))\|_g \, |\dot\tau(s)| \, ds = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_g \, dt = L(\gamma) \end{array}\right)$$

Par contre l'énergie $E(\gamma) = \int_a^b \|\gamma(t)\|_g^2 \, dt$ dépende de la paramétrisation de γ.

distance riemannienne

$$d : M \times M \to [0, \infty)$$

C^∞ par morceaux

$$d(x,y) = \inf \left\{ L(\gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : [0,1] \to M \\ \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{array} \right\}$$

$$d(x,x) = 0 \quad \forall x \in M$$

$$d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in M$$

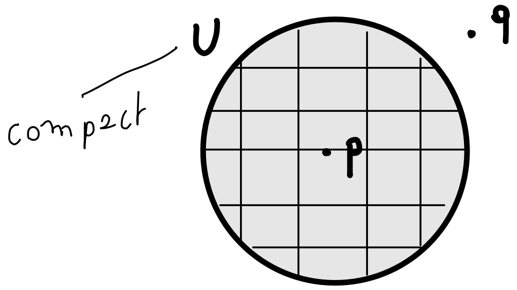
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in M$$

Prop $d(p,q) = 0$ ssi $p = q$

(donc d est bien une distance)

Preuve On fixe $p \in M$, $q \neq p$

$x_1, \dots, x_m$ coord. loc. centrée en p



en U on a g, $g_0 = dx_1^2 + \dots + dx_m^2$

$\|\cdot\|_g \geq \varepsilon \cdot \|\cdot\|_{g_0}$ en U

$$d_g(p,q) \geq \inf_{y \in \partial U} d_g(p,y) \geq \varepsilon \inf_{y \in \partial U} d_{g_0}(p,y) > 0.$$

distance riemannienne

exercice La topologie d'espace métrique de (M,d) coincide avec la topologie de M comme variété differentiable

Thm (Principe de moindre action)

Une courbe $\gamma : [a,b] \to M$ C^∞ par morceaux est une geodesique

ssi

$\|\dot\gamma(t)\|_g \equiv \text{const} > 0$ et γ est un point critique de la fonctionnelle longueur L

Notion naïve de point critique.

$\gamma\ [a,b] \to M$ C^∞ par morceaux est un point critique de L quand

$$\partial_s\big|_{s=0} L(\Gamma(s,\cdot)) = 0$$

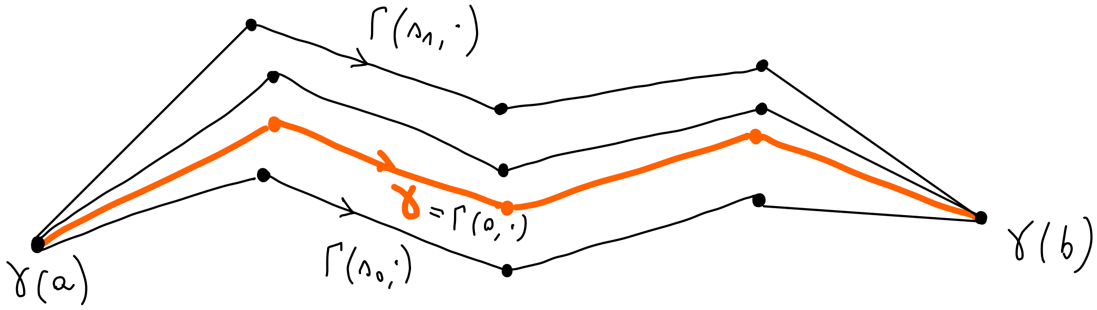
$\forall\ \Gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \xrightarrow{C^0} M$ tq. 1) $\Gamma(0,\cdot) = \gamma$

2) $\Gamma(s,a) = \gamma(a)$, $\Gamma(s,b) = \gamma(b)$ $\forall s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$

3) $a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$

$\Gamma|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_i,t_{i+1}]}$ C^∞ $\forall i = 0,\dots,K-1$

Γ



(On appelle Γ une **déformation de γ à extrémités fixées**)

Preuve

Γ déf de γ à extrémités fixées

$$V(t) = \partial_s|_{s=0}\Gamma(s,t)$$ champ de vect. le long de γ (C^∞ par morceaux, $V(a)=0$, $V(b)=0$)

$$dL(\gamma)V = \partial_s|_{s=0} L(\Gamma(s,\ )) = \sum_{i=0}^{K-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \partial_s|_{s=0} \overbrace{\|\partial_t\Gamma(s,t)\|_g}^{\sqrt{g(\partial_t\Gamma,\partial_t\Gamma)}}\, dt$$

$$= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2\|\partial_t\Gamma\|_g} 2\, g(\underbrace{\nabla_s\partial_t\Gamma}_{\nabla_t\partial_s\Gamma}, \partial_t\Gamma)|_{s=0}\, dt$$

(on va le vérifier dans un instant)

$$= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{\|\dot\gamma\|_g} g(\nabla_t V, \dot\gamma)\, dt$$ (dépende seulement de γ et V)

(supposons $\|\dot\gamma\|_g \equiv c > 0$)

$$= \frac{1}{c}\left[-\sum_{i=0}^{K-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\nabla_t \dot\gamma, V(t))\, dt + \sum_{i=1}^{K-1} g\left(\dot\gamma(t_i^-) - \dot\gamma(t_i^+), V(t_i)\right)\right]$$

integr par parties

Si γ est un géodésique, alors $\nabla_t \dot\gamma \equiv 0$, $\dot\gamma(t_i^-) = \dot\gamma(t_i^+)$

$\Rightarrow$ γ est un point critique de L

Si $\|\dot\gamma\|_g \equiv c > 0$ et γ est un point critique de L, alors :

- en prenant V tq $\mathrm{supp}(V) \subset (t_i, t_{i+1})$ on déduit $\nabla_t \dot\gamma = 0 \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1})$ $\Rightarrow$ $\nabla_t \dot\gamma \equiv 0$ $\forall t \in [a,b] \setminus \{t_0, \dots, t_k\}$

- en prenant V t.q $t_i \in \mathrm{supp}(V) \subset (t_{i-1}, t_{i+1})$ on a $0 = dL(\gamma)V = \frac{1}{c} g\left(\gamma(t_i^-) - \dot\gamma(t_i^+), V(t_i)\right)$ donc $\dot\gamma(t_i^-) = \dot\gamma(t_i^+)$
$\Rightarrow$ γ est C^1 $\Rightarrow$ $\nabla_t \dot\gamma \equiv 0$ $\forall t$ $\Rightarrow$ γ géodésique $\square$

Si $\Psi : \underset{s}{(a,b)} \times \underset{t}{(c,d)} \to M$ C^∞, alors

$$\nabla_t \partial_s \Psi = \sum_i \Big(\partial_t \partial_s \Psi^i + \sum_{j,k} \partial_t \Psi^j \partial_s \Psi^k \underbrace{\Gamma^i_{jk}}_{=\Gamma^i_{kj}} (\Psi(s,t)) \Big) \partial_{x^i}$$

coordonnées locales

$$= \nabla_s \partial_t \Psi$$

car :

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_i \Gamma^i_{jk} \partial_{x^i} &= \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^k} \\ 0 = [\partial_{x^j}, \partial_{x^k}] &= \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^k} - \nabla_{\partial_{x^k}} \partial_{x^j} \end{aligned}}$$

Si $\gamma . [a,b] \to M$ C^∞ par morceaux satisfait

$$L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$$

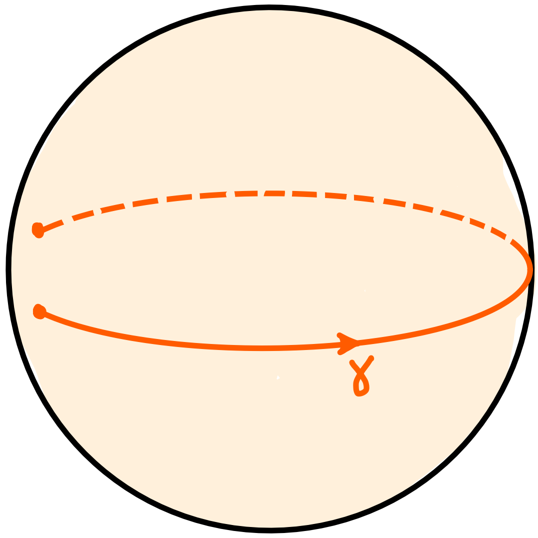
alors γ est une géodésique

Si γ $[a,b] \to M$ est une géodésique, est-il vrai que $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$?

Oui si $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{eucl})$

Faux en général.

$(M,g) = (S^2, g_{ronde})$



Néanmoins ...

Lemme de Gauss

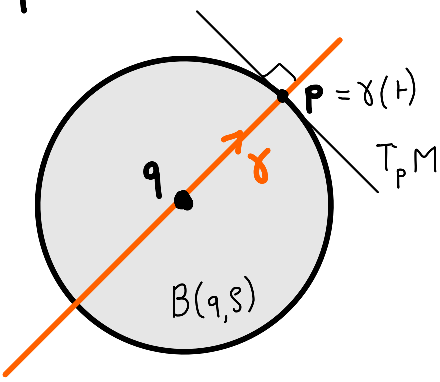
$$g\left(d\exp_q(v)v, d\exp_q(v)w\right) = g(v,w) \quad \forall v,w \in T_qM$$

Rmq $T_v(T_qM) \equiv T_qM$

$\delta > 0$

$B(q,\delta) = \{\exp_q(v) \mid \|v\|_q < \delta\}$

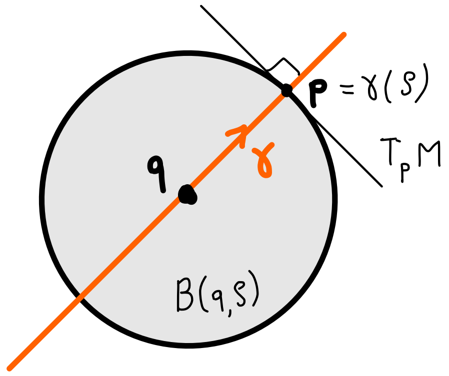
En particulier.



si $\delta < \mathrm{inj}(q)$

$$\dot\gamma(t) \perp_g T_p(\partial B(q,\delta))$$

En fait.



$$\|\dot\gamma\|_g \equiv 1$$

$w \in T_p(\partial B(q,\delta))$ arbitraire

$$g(\dot\gamma(\delta), w) \overset{?}{=} 0 \qquad (*)$$

On peut écrire w comme $w = \dot\omega(0)$ pour un certain $\omega : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial B(q,\delta)$ tq $\omega(0) = p$

$\Rightarrow \omega(s) = \exp_q(\delta\, v(s))$, où $v(s) \in T_qM$, $\|v(s)\| \equiv 1$
$v(0) = \dot\gamma(0)$

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \|v(s)\|_g^2 = 2g(\dot v(0), v(0)) = 2g(\dot v(0), \dot\gamma(0))$$

donc $\quad \left(\gamma(t) = \exp_q(t\,\dot\gamma(0))\right)$

$$g(\dot\gamma(\delta), w) = g\left(d\exp_q(\delta\dot\gamma(0))\,\dot\gamma(0),\ d\exp_q(\delta\dot\gamma(0))\,\delta\,\dot v(0)\right)$$

$$= g(\dot\gamma(0), \dot v(0)) = 0$$

Gauss

Preuve du lemme de Gauss

- Vrai si $v=0$ ou $w=0$

- Vrai si $w = \lambda v$, car

  $\gamma(t) := \exp_q(tv)$ geod

  $\| d\exp_q(v)v \|_g = \| \dot\gamma(1) \|_g = \| \dot\gamma(0) \|_g = \| v \|_g$

- Il reste à considérer le cas où $g(v,w) = 0$

  $\Rightarrow \exists$ courbe lisse $\sigma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to T_qM$, $\sigma(0) = v$, $\dot\sigma(0) = w$

  $\| \sigma(s) \|_g \equiv \| v \|_g \quad \forall t$

$\Gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,1] \to M$, $\Gamma(s,t) = \exp_q(t\sigma(s))$

$$g\big(\overbrace{\partial_s\Gamma}^{=0 \text{ en } t=0}, \partial_t\Gamma\big)\Big|_{s=t=0} = 0 = g(v,w)$$

$$g(\partial_s\Gamma, \partial_t\Gamma)\Big|_{\substack{s=0\\t=1}} = g\big(d\exp_q(v)w, d\exp_q(v)v\big)$$

Il me reste à prouver que $t \mapsto g(\partial_t \Gamma, \partial_s \Gamma)\big|_{s=0}$ est constante :

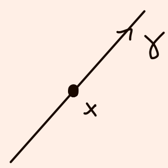
$$\partial_t\, g(\partial_t \Gamma, \partial_s \Gamma) = g\big(\underbrace{\nabla_t \partial_t \Gamma}_{\substack{= 0, \\ \text{car } t \mapsto \Gamma(t,s) \\ \text{est une géodésique}}}, \partial_s \Gamma\big) + g\big(\partial_t \Gamma, \underbrace{\nabla_t \partial_s \Gamma}_{\nabla_s \partial_t \Gamma}\big)$$

$$= \frac{1}{2}\, \partial_s \underbrace{\|\partial_t \Gamma\|_g^2}_{\equiv \|w\|_g} = 0$$

$\square$

Lemme $\tau \in (0, \mathrm{inj}(x))$, $v \in T_x M$, $\|v\|_g = 1$

$\gamma\ [0,\tau] \to M$, $\gamma(t) = \exp_x(tv)$



Si $\zeta \cdot [0,\tau] \to M$ C^∞ par morceaux satisfait

$\|\zeta\| \equiv \mathrm{const}$, $\zeta(0) = \gamma(0)$, $\zeta(\tau) = \gamma(\tau)$,

$L(\zeta) \leq L(\gamma)$

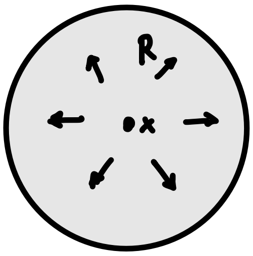
alors $\zeta \equiv \gamma$

Preuve

$\delta = \mathrm{inj}(x)$

- champ de vecteurs radial sur $B(x,\delta)\setminus\{x\}$

$$R(\exp_x(tw)) = \frac{d}{dt}\exp_x(tw), \quad \forall w \in T_xM \text{ avec } \|w\|_g = 1, \; t \in (0,1]$$



$\|R\|_g \equiv 1$

R est tangent à chaque géodésique qui passe par x

- R est un gradient.

$\boxed{R = \mathrm{grad}(r)}$, où $r : B(x,\delta)\setminus\{x\} \to (0,\delta)$

$r|_{\partial B(x,s)} \equiv s$

En fait.

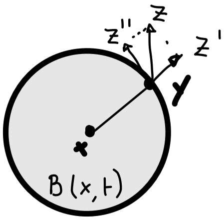
$r(\exp_x(tw)) = t$, $\quad \forall w \in T_xM$ avec $\|w\|_g = 1$, $t \in (0,1]$

$y = \exp_x(tw)$

$z \in T_yM$

$(*)$ $g\left(\operatorname{grad}(r)_y, R(y)\right) = dr(y)R(y) = \frac{d}{dt}\underbrace{r(\exp_x(tw))}_{t} = 1$

donc on peut écrire tout $z \in T_yM$ comme

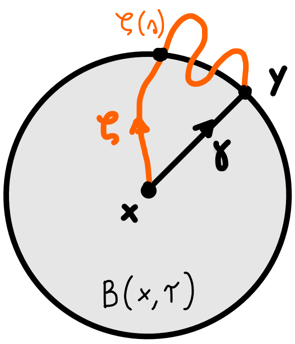


$$z = \underset{\underset{aR(y)}{\parallel}}{z'} + \underset{\underset{\operatorname{Ker} dr(y) = T_y(\partial B(x,t))}{\cap}}{z''}$$

Par lemme de Gauss $g(z', z'') = 0$,

et par $(*)$ on a $dr(y)z' = g(R(y), z')$

$$g(R(y), z) = \underbrace{g(R(y), z')}_{dr(y)z' = dr(y)z} + \underbrace{g(R(y), z'')}_{0} = dr(y)z$$

• 

$\xi : [0,T] \to M$ C^∞ par morceaux

tq $\xi(0) = x$, $\xi(T) = y$

(on pourrait même prendre une telle ξ absolument continue)

on peut supposer $\|\dot{\xi}\| \equiv 1$

$$s := \min\{t > 0 \mid \xi(t) \in \partial B(x,r)\}$$

$\xi(t) = \underbrace{a(t)}_{dr(\xi(t))\xi(t)} R(\xi(t)) + S(t)$, pour presque tout $t \in [0,s]$

$$g(R(\xi(t)), S(t)) = 0$$

$$L(\zeta) \underset{\substack{= \\ \text{si } s=T}}{\geq} \int_0^s \|\dot\zeta\|_g \, dt = \int_0^s \sqrt{|a(t)|^2 + \|S(t)\|_g^2} \, dt$$

$$\underset{\substack{= \\ \text{si } S\equiv 0}}{\geq} \int_0^s |a(t)| \, dt = \int_0^s |dr(\zeta(t))\dot\zeta(t)| \, dt$$

$$\underset{\substack{= \\ \text{si } a(t)\geq 0 \\ \forall t}}{\geq} \int_0^s dr(\zeta(t))\dot\zeta(t) = r(\underbrace{\zeta(s)}_{\in \partial B(x,T)}) - r(\underbrace{\zeta(0)}_{=x}) = T = L(\gamma)$$

$$\Rightarrow \quad L(\zeta) \geq L(\gamma)$$

$$= \quad \text{si } \zeta = \gamma$$

$\square$

<u>Rmq</u>

- $\forall\, \delta < \mathrm{inj}(x)$ on a $\underset{\substack{\shortparallel \\ \{\exp_x(v) \,|\, \|v\|_g < \delta\}}}{B(x,\delta)} = \{y \in M \,|\, d(x,y) < \delta\}$
- $\forall$ geod. $\gamma : (a,b) \to M$ on a $L(\gamma|_{[t_0,t_1]}) = d(\gamma(t_0), \gamma(t_1))$
  si $t_1 - t_0 < \mathrm{inj}(\gamma(t_0))$