TD1 Géométrie Riemannienne

17 Janvier 2025

1. On définit le ruban de Möbius (abstrait) par

$$M = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(x, u) \sim (x + 1, -u),$$

et on note $\pi : M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique. On munit chaque fibre d'une structure linéaire par

$$\lambda[x, u] + \mu[x, v] = [x, \lambda u + \mu v].$$

a) Montrer que π est un fibré vectoriel de rang 1.

b) Montrer que ce fibré est non trivial.

c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On veut classer les fibrés de rang r sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ou sur S^1). On note U_0 et U_1 les images dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de $]0, 1[$ et de $] - 1/2, 1/2[$. Montrer qu'il existe des trivialisations

$$\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}, \quad i = 0, 1,$$

c'est-à-dire que $\mathrm{pr}_1 \times \tau_i$ est un difféomorphisme de $\pi^{-1}(U_i)$ sur $U_i \times \mathbb{R}$ qui est linéaire sur chaque fibre. (On peut appeler "trivialisation" τ ou $\pi \times \tau$ suivant ce qui est le plus commode).

d) On note $g : U_0 \cap U_1 \to \mathsf{GL}(r, \mathbb{R})$ l'application de transition telle que $\tau_1 = (g \circ \pi)\tau_0$. Noter que $U_0 \cap U_1$ a deux composantes connexes C_1 et C_2. Montrer que E est trivial si et seulement si $g(C_1)$ et $g(C_2)$ sont dans la même composante connexe de $\mathsf{GL}(r, \mathbb{R})$.

e) Pour tout $r > 0$, écrire un fibré de rang r non trivial sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (unique à isomorphisme près d'après d)).

f) On remplace maintenant S^1 par S^k avec $k \in \mathbb{N}^*$. Soit E un fibré de rang $r > 0$ sur S^k. Écrire $S^k = U_0 \cup U_1$ avec U_0 et U_1 difféomorphes à $\mathbb{R}^k$ et $U_0 \cap U_1$ difféomorphe à $S^{k-1} \times] - 1, 1[$. Définir $\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^r$ et $g : U_0 \cap U_1 \to \mathsf{GL}(r, \mathbb{R})$ comme en c) et d).

g)* Si $r = 1$, montrer que E est toujours trivial. Si $r \geq 2$, montrer que E est trivial si et seulement si g est homotope à l'identité, et que ceci est équivalent à : $g|_{S^{k-1}} : S^{k-1} \to \mathsf{GL}(r, \mathbb{R})$ est homotope à l'identité.

2. Un fibré vectoriel η est dit k-**stablement trivial** s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que la somme direct $\eta \oplus \varepsilon^k$ soit un fibré vectoriel trivial, où ε^k désigne le fibré trivial standard de dimension k.

a) Montrer que tout groupe de Lie est parallélisable (0-stablement trivial).

b) Soit M une variété lisse de dimension n et supposons qu'il existe une immersion

$$f : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n+k}.$$

Prouver que le fibré tangent TM est stablement trivial.

3. Dans cet exercice, nous introduisons d'importants fibrés en droites sur $\mathbb{CP}^n$. Pour $d \in \mathbb{Z}$, on définit le quotient

$$H^d := ((\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C})/\sim$$

où $(z_0, \ldots, z_n; \zeta) \sim (\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n; \lambda^d \zeta)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

a) Montrer que H^d est un fibré vectoriel réel de dimension 2 sur $\mathbb{CP}^n$. Trouver des trivializations explicites de ce fibré et calculer les applications de transition correspondantes.

b) Trouver un isomorphisme entre H^{-1} et le fibré tautologique en droites
$$E := \{(\ell, w) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : w \in \ell\}.$$

c) Trouver un isomorphisme entre H^1 et le fibré en droites canonique
$$H := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C}).$$

d) Montrer que
$$T\mathbb{CP}^n \oplus \mathbb{C} \cong H \oplus \cdots \oplus H$$
avec $(n+1)$ copies de H.

4. Soit (X, d) un espace métrique. Si $\gamma : [a, b] \to X$ est un chemin continu, on définit sa longueur par :
$$\ell_d(\gamma) := \sup \sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \in [0, +\infty],$$
où $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ est une subdivision de $[a, b]$. Si $\ell_d(\gamma)$ est finie, on dit que γ est rectifiable.

a) Si γ est rectifiable, montrer qu'il existe une unique reparamétrisation $\varphi \in$ Homeo$^+([0, \ell_d(\gamma)], [a, b])$ telle que $\gamma \circ \varphi$ soit paramétré par la longueur d'arc, c'est-à-dire
$$(\forall a \leq t_0 < t_1 \leq b) \quad \ell_d((\gamma \circ \varphi)|_{[t_0, t_1]}) = t_1 - t_0.$$

b) On définit $\widetilde{d}(p, q) = \inf \ell_d(\gamma)$, l'infimum étant pris sur tous les chemins continus $\gamma : [a, b] \to X$ allant de p à q. Supposons que $\widetilde{d}(p, q)$ soit toujours fini. Montrer que $\widetilde{d}$ est une distance sur X.

c) La distance $\widetilde{d}$ est-elle toujours équivalente à d (lorsque c'est une distance) ?

d) Supposons que $X = \mathbb{R}^n$ et que $d = d_E$ soit la distance euclidienne canonique.

1) Si γ est de classe C^1 par morceaux, montrer que :
$$\ell_d(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_E \, dt.$$
En particulier, cette longueur est finie. Si de plus γ est de classe C^1 et une immersion, montrer que φ (définie dans 1) est un difféomorphisme C^1 et que $\|(\gamma \circ \varphi)'\|_E \equiv 1$.

2) Montrer que l'égalité ci-dessus reste valable si γ est absolument continue, en particulier si elle est Lipschitzienne.

3) Montrer que $\ell_d(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$, et que dans le cas $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_E)$, il y a égalité si et seulement si γ est une paramétrisation du segment $[a, b]$, c'est-à-dire
$$\gamma(t) = (1 - \varphi(t))\gamma(a) + \varphi(t)\gamma(b), \quad \varphi \in \text{Homeo}^+([a, b], [0, 1]).$$

e) Montrer que $\widetilde{d} = d$.

f) Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété et $d = d_E|_X$, montrer que $\widetilde{d}$ définit la même topologie que d, et que $C^{-1}d \leq \widetilde{d} \leq Cd$ si X est compacte.