TD2 Géométrie Riemannienne

24 Janvier 2025

1. a) Soit $f : M \to N$ une application C^∞ et soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel (E, π, N). Montrez qu'il existe une unique connexion $f^*\nabla$ sur f^*E telle que, pour toute section $s \in \Gamma(E)$,
$$(f^*\nabla)(s \circ f) = \nabla_{df(\cdot)}(s) \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM, f^*E)).$$

b) Montrez que $f^*\nabla$ de la partie a) est la seule connexion sur f^*E telle que : pour toute section $s \in \Gamma(f^*E)$ et toute courbe C^∞ $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, si $s_1 \in \Gamma(E)$ satisfait $s_1(f(c(t))) = s(c(t))$ pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, alors
$$(f^*\nabla)_{\dot c(0)}(s) = \nabla_{df(\dot c(0))}(s_1).$$

c) Soit $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ une courbe C^∞ telle que $f \circ c$ soit un point constant $q \in N$. Montrez que, pour toute section $s \in \Gamma(f^*E)$,
$$(f^*\nabla)_{\dot c(0)}(s) = \frac{d}{dt}(s \circ c)(t)\bigg|_{t=0} \in E_q,$$
où $\frac{d}{dt}(s \circ c)(t) \in T_{s(c(t))}(E_q) = E_q$ désigne le vecteur tangent de la courbe $s \circ c$ dans E_q.

2. On donne une définition *géométrique* d'une connexion linéaire ∇ sur un fibré vectoriel $\pi : E \to B$.

a) On définit d'abord le sous-fibré vertical $V \subset TE$ par $V_e = T_e E_{\pi(e)}$ (canoniquement isomorphe à $E_{\pi(e)}$). Montrer que c'est bien un sous-fibré vectoriel.

b) On dit qu'un sous-fibré $H \subset TE$ est *horizontal* si $TE = H \oplus V$: H est un supplémentaire de V dans TE, c'est-à-dire
$$(\forall e \in E) \quad T_e E = H_e \oplus V_e.$$
Un tel sous-fibré équivaut à la donnée d'une projection fibrée $p_H : TE \to V$, $T_e E \to E_{\pi(e)}$. On définit alors, si $s \in \Gamma(B, E)$:
$$\nabla^H s = p_H \circ ds : TB \to E, \quad T_b B \to E_b.$$
Montrer que ceci est une connexion linéaire si et seulement si H est invariant par multiplication et par addition :
$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall e \in E) \quad dh_\lambda(H_e) = H_{\lambda e},$$
$$(\forall (e_1, e_2) \in E \oplus E) \quad d\sigma_{(e_1,e_2)}.(H_{e_1} \oplus H_{e_2}) = H_{e_1+e_2}.$$

3. Soit M la sphère unité $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

a) Définir les *coordonnées sphériques*
$$(\theta, \varphi) = (\text{longitude}, \text{latitude}) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
Montrer que cela donne une paramétrisation de S^2 :
$$(x, y, z) = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$$
qui est un difféomorphisme de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $S^2 \setminus \{N, S\}$, N et S étant les pôles nord $(0, 0, 1)$ et sud $(0, 0, -1)$.

b) Soit d la restriction à S^2 de la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que si $\gamma : [a,b] \to S^2$ est un chemin C^1 par morceaux, alors

$$\ell_d(\gamma) = \int_a^b \Big((\varphi \circ \gamma)'(t)^2 + (\cos \varphi(\gamma(t)))^2 (\theta \circ \gamma)'(t)^2 \Big)^{1/2} dt.$$

Pour simplifier, supposez que γ prend les valeurs N et S un nombre fini de fois (sinon, l'intégrale doit être interprétée comme une intégrale de Lebesgue sur $[a,b] \setminus \gamma^{-1}(\{N,S\})$).

c) En déduire que si $p,q \in S^2$, on a

$$d_g(p,q) = \arccos\langle p,q\rangle.$$

Commencez par le cas où $p,q \in \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}_+$, autrement dit p,q sont sur l'arc de cercle $\theta = 0$.

d) Montrer que, si $p \neq q$, il existe un chemin $\gamma : [a,b] \to S^2$ de longueur $d_g(p,q)$, et que si $p \neq -q$, ce chemin est unique et paramétrise le petit arc du grand cercle $S^2 \cap \mathrm{Vect}(p,q)$ de p à q. Que se passe-t-il si $p = -q$?

e) Plus généralement, soit $M = S_E$ la sphère unité dans un espace euclidien E, avec

$$g_x(v,w) = \langle v,w\rangle, \quad v,w \in T_x S_E = x^\perp.$$

Généralisez les résultats des points c) et d).

4. On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$, muni de la métrique

$$g_{hyp} = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

L'espace $(\mathbb{D}, g_{hyp})$ est appelé le disque de Poincaré.

a) Soit G le groupe des automorphismes conformes de $\mathbb{D}$, c'est-à-dire les éléments de G sont de la forme

$$z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}$. Montrer que ces éléments sont des isométries de $(\mathbb{D}, g_{hyp})$.

b) Montrer que la distance entre 0 et $t \in]-1,1[$ est égale à $2\tanh^{-1}(|t|)$.

c) Soient $z,w \in \mathbb{D}$, en déduire que

$$d_{hyp}(z,w) = 2\tanh^{-1}\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|.$$

d) Considérons le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, muni de la métrique $g_{hyp} = \frac{|dz|^2}{\mathrm{Im}(z)^2}$. $\mathbb{H}$ est appelé le demi-plan supérieur de Poincaré. Montrer que $(\mathbb{H}, g_{hyp})$ est isométrique à $(\mathbb{D}, g_{hyp})$.