# TD3 Géométrie Riemannienne

31 Janvier 2025

**1.** Considérons $\mathbb{R}^n$ avec la métrique euclidienne $g_{can}$.

a) Prouvez que le groupe des isométries de $g_{can}$ est le groupe euclidien, c'est-à-dire les applications de la forme
$$x \longmapsto Ax + b$$
où $A$ est une matrice orthogonale et $b$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

b) Soit $\Gamma$ un réseau dans $\mathbb{R}^n$ (un sous-groupe discret de rang $n$). Rappelons que $(\mathbb{R}^n, \Gamma)$ est linéairement isomorphe à $(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n)$. Prouvez que $M_\Gamma = \mathbb{R}^n/\Gamma$ est une variété différentiable isomorphe à $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et qu'il existe une unique métrique riemannienne $g_\Gamma$ sur $M_\Gamma$ telle que la projection $\pi : (\mathbb{R}^n, g_{can}) \longrightarrow (M_\Gamma, g_\Gamma)$ soit une isométrie locale.

c) Prouvez que $(M_\Gamma, g_\Gamma)$ est isométrique à $(M_\Lambda, g_\Lambda)$ si et seulement s'il existe $A \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $\Lambda = A\Gamma$.

d) Prenons $n = 2$, prouvez que l'ensemble des variétés $(M_\Gamma, g_\Gamma)$ à isométrie près est en bijection avec $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}/PSL(2, \mathbb{Z})$ (où $PSL(2, \mathbb{Z})$ agit par homographies sur le demi-plan $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$).

e) On dit qu'une variété riemannienne $M$ est homogène si elle admet un groupe de Lie agissant de manière lisse et transitivement par isométries et que $M$ est isotrope en $p$ s'il existe un groupe de Lie $G$ agissant lisssement sur $M$ par isométries tel que le sous-groupe d'isotropie $G_p \subset G$ (le sous-groupe des éléments de $G$ qui fixent $p$) agisse transitivement sur l'ensemble des vecteurs unitaires dans $T_pM$. Prouvez que $(\mathbb{R}^n, g_{can})$ et $(M_\Gamma, g_\Gamma)$ sont homogènes. Sont-elles isotropes ?

**2.** Le modèle hyperboloïde de l'espace hyperbolique.

a) $\mathbb{R}^3$ muni de la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ est appelé l'espace de Minkowski en dimension $3$. $\mathbb{H}^2$ est la « feuille supérieure » $z > 0$ de l'hyperboloïde à deux nappes dans $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation
$$q(x, y, z) = -1$$
Prouvez que la forme bilinéaire $\varphi_q$ définit une métrique Riemannienne sur $\mathbb{H}^2$.

b) Rappelons que le disque de Poincaré est le disque ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ dans $\mathbb{C}$, muni de la métrique
$$g_{hyp} = \frac{4|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}$$
Fixons $p_0 = (0, 0, -1)$ et identifions $\mathbb{D}$ avec l'ensemble $\{(x, y, 0), x^2 + y^2 < 1\}$ dans $\mathbb{R}^3$. Pour tout $p \in \mathbb{H}^2$, définissons $\pi(p) = u \in \mathbb{D}$, où $u$ est le point où la droite passant par $p_0$ et $p$ intersecte le plan $z = 0$. Prouvez que $\pi$ est une isométrie entre $\mathbb{H}^2$ et $\mathbb{D}$.

c) Considérons le demi-plan $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, muni de la métrique $g_{hyp} = \frac{|dz|^2}{\mathrm{Im}(z)^2}$.
$\mathbb{U}$ est appelé le demi-plan de Poincaré. Prouvez que $(\mathbb{U}, g_{hyp})$ est isométrique à $(\mathbb{D}, g_{hyp})$.

**3.** Soit $g$ une métrique riemannienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui est isométrique à la métrique euclidienne.

a) Supposons que $g = f(x,y)^2(dx^2 + dy^2)$. Que pouvez-vous dire sur $f$ ?

b) Même question si $g = dx^2 + f(x,y)dy^2$.

**4.** (Théorème de Liouville) Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, et soit $U \subset E$ un ouvert connexe. On considère une application $\varphi : U \to E$ de classe $C^3$ qui est conforme, c'est-à-dire que pour tout $x \in U$, la différentielle $D\varphi_x$ est une similitude.

On note $c(x)$ le rapport de similitude défini par

$$\forall (x,v) \in U \times E, \quad \|D\varphi_x v\| = c(x)\|v\|.$$

On pose alors $\rho = c^{-1}$.

a) Montrer que $c$ est de classe $C^2$.

b) Montrer que si $x \in U$ et $y, z, w \in E$ sont deux à deux orthogonaux, alors

$$\langle D^2\varphi_x(y,z), D\varphi_x(w)\rangle = 0.$$

De plus, on a

$$\langle D^2\varphi_x(y,z), D\varphi_x(y)\rangle = -\|y\|^2\rho^{-3}(x)D\rho_x(z).$$

c) Montrer que

$$\rho(x)D^2\varphi_x(y,z) + D\rho_x(z)D\varphi_x(y) + D\rho_x(y)D\varphi_x(z) = 0.$$

d) Montrer que $D^2\rho_x(y,w)D\varphi_x(z)$ est symétrique en $(z,w)$ si $y, z, w$ sont deux à deux orthogonaux. En déduire que

$$D^2\rho_x = \alpha(x)\langle .,.\rangle.$$

e) Montrer que $\alpha(x)$ est constant, c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$D^2\rho_x = 2a\langle .,.\rangle.$$

f) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\rho(x) = a\|x - x_0\|^2 + b.$$

g) Supposons que $\varphi$ est un difféomorphisme sur son image $V \subset E$. Montrer qu'il existe $y_0 \in E$ et $c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a\|x - x_0\|^2 + b)(c\|\varphi(x) - y_0\|^2 + d) = 1.$$

h) (i) Pour $u \in E$ unitaire, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que $x_0 + Iu \subset U$. Montrer qu'il existe unitaire $v \in E$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(x_0 + tu) = y_0 + f(t)v.$$

(ii) Montrer que $a$ ou $b$ est nul.

i) (i) Si $a = 0$, montrer que $\varphi$ est la restriction d'une similitude affine.

(ii) Si $b = 0$, montrer que $\sigma \circ \varphi$ est la restriction d'une similitude affine, où $\sigma$ est une inversion de centre $x_0$.