TD4 Géométrie Riemannienne

12 Février 2025

1. Si un groupe G agit par difféomorphismes sur une variété différentiable M, on dit que l'action est proprement discontinue si pour tout $p \in M$, il existe un voisinage $U \subset M$ tel que $U \cap g(U) = \emptyset$ pour tout $g \neq e$.

   a) Prouver que le quotient M/G possède une structure différentiable pour laquelle la projection $\pi : M \longrightarrow M/G$ est un difféomorphisme local.

   b) On définit une métrique riemannienne $\tilde{g}$ sur M. Prouver que si le groupe G agit par isométries sur $(M, \tilde{g})$, alors il existe une unique métrique riemannienne g sur M/G telle que la projection $\pi : (M, \tilde{g}) \longrightarrow (M/G, g)$ soit une isométrie locale.

   c) On ne suppose pas ici que l'action de G sur M est proprement discontinue. Supposons cependant que $N := M/G$ est une variété et que $\pi : M \longrightarrow N$ est une submersion. En chaque point $x \in M$, l'espace tangent T_xM se décompose en une somme directe orthogonale
   $$T_xM = H_x \oplus V_x$$
   où $V_x := \ker(d_x\pi)$ est l'espace vertical et $H_x := V_x^{\perp}$ est l'espace horizontal.
   Prouver que l'on peut définir une unique métrique riemannienne g sur N pour laquelle π est une submersion riemannienne ($\tilde{g}(X, Y) = g(d\pi(X), d\pi(Y))$ pour tout X, Y horizontaux).

   d) Rappelons que l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est défini comme l'ensemble des sous-espaces complexes de dimension 1 de $\mathbb{C}^{n+1}$. On note $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ la projection canonique.

      i- Prouver qu'il existe une unique métrique g sur $\mathbb{C}P^n$ pour laquelle la restriction de la projection $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ est une submersion riemannienne (où $\mathbb{S}^{2n+1}$ est muni de la métrique induite de $\mathbb{C}^{n+1}$).
      La métrique g est appelée métrique de Fubini-Study.

      ii- Prouver que $(\mathbb{C}P^n, g)$ est une variété riemannienne homogène et isotrope.

      iii- Est-ce que $\pi : (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}, g_{can}) \longrightarrow (\mathbb{C}P^n, g)$ est une submersion riemannienne ?

2. a) Rappelons que le groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ agit par isométries sur le plan hyperbolique $(\mathbb{H}^2, g_{hyp})$. Montrer que cette action est transitive et calculer $Stab(i)$.
   b) Montrer qu'il existe un homéomorphisme entre $PSL(2, \mathbb{R})$ et le fibré tangent unitaire $U\mathbb{H}^2$ qui est $PSL(2, \mathbb{R})$-équivariant.

3. Métriques sur les courbes
   a) Soit M une courbe lisse sans bord. Montrer que deux métriques riemanniennes g_1, g_2 sur M sont conformes entre elles.
   b) Ce résultat reste-t-il valable pour $dim(M) \geq 2$?
   c) Classifier les courbes lisses, sans bord, munies d'une métrique Riemannienne, à isométrie près?

4. Soit T le tore dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner le cercle $(y - R)^2 + z^2 = r^2$ dans le plan (y, z) autour de l'axe z, où $0 < r < R$. Montrer que T est conformément plat.

5. Soit γ une courbe fermée, simple et régulière dans $\mathbb{S}^2$. On définit la surface S_γ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ en considérant tous les rayons passant par γ. S_γ est donné par la paramétrisation suivante:

$$\phi : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(r, t) \mapsto r.\gamma(t)$$

a) Montrer que S_γ est plate, c'est-à-dire qu'il existe des coordonnées locales (u, v) pour lesquelles $g = du^2 + dv^2$.

b) Pour quelles γ_1 et γ_2, on a S_{γ_1} est globalement isométrique à S_{γ_2} ?