TD5 Géométrie Riemannienne

14 Février 2025

1. Un groupe de Lie est un groupe G muni d'une structure différentielle, telle que l'application

$$(x, y) \in G \times G \longmapsto xy^{-1} \in G$$

est lisse.

a) Soit G un groupe de Lie compact et connexe. Montrez que G admet une métrique Riemannienne g bi-invariante ($L_x^* g = R_x^* g = g$, pour tout $x \in G$, où $L_x(y) = xy$ et $R_x(y) = yx$).

b) Montrez que $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R})$ n'admettent pas de métrique bi-invariante pour tout $n \geq 2$.

Supposons maintenant que G possède une métrique bi-invariante et soient X, Y, Z des champs de vecteurs invariants à gauche sur G.

c) En utilisant l'invariance à gauche de g, montrez que

$$g(X, \nabla_Y X) = \frac{1}{2} g(Y, [X, Y])$$

d) Utilisez la bi-invariance pour montrer que

$$g([X, Y], Z) = g(X, [Y, Z])$$

e) Montrez que les géodésiques de G partant de e sont des sous-groupes à un paramètre de G.

2. Soit (M, g) une variété riemannienne et X, Y deux champs de vecteurs lisses sur M. Pour $p \in M$, soit $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ une courbe intégrale de X passant par p, c'est-à-dire $\gamma(0) = p$ et $\frac{d\gamma}{dt} = X(\gamma(t))$. Montrez que la connexion de Levi-Civita de (M, g) est

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt}((tr_\gamma^{0,t})^{-1}(Y(\gamma(t))))_{t=0}$$

Où $tr_\gamma^{0,t} : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ est le transport parallèle le long de γ de 0 à t.

3. Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ la surface obtenue par la rotation de la courbe lisse α dans le plan (y, z) autour de l'axe z. Nous supposons que α est paramétrisée par longueur d'arc :

$$\alpha(v) = (f(v), g(v)) \ , \ v \in I \subset \mathbb{R}$$

telle que $f'(v)^2 + g'(v)^2 \neq 0$ et $f(v) \neq 0$. La paramétrisation standard de M est :

$$\varphi : (u, v) \in [0, 2\pi) \times I \mapsto (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) \in \mathbb{R}^3$$

M est appelée une surface de révolution. L'image par φ des courbes $u =$ constante et $v =$ constante sont respectivement appelées méridiens et parallèles de M.

a) Montrez que la métrique induite dans les coordonnées (u, v) est donnée par

$$g_{11} = f^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (f')^2 + (g')^2$$

b) Montrez que les équations locales d'une géodésique γ sont

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2ff'}{f^2} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} (\frac{du}{dt})^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} (\frac{dv}{dt})^2 = 0$$

c) Soit $\beta(t)$ l'angle orienté entre γ et le parallèle P de M intersectant γ en $\gamma(t)$ et soit r le rayon du parallèle P. Montrez que

$$r \cos \beta = \text{constante}$$

L'équation ci-dessus est appelée relation de Clairaut.