TD6 Géométrie Riemannienne

21 Février 2025

1. Soit $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité, γ un parallèle quelconque sur $\mathbb{S}^2$ et $V_0 \in T_{\gamma(0)}\mathbb{S}^2$. Décrire géométriquement le transport parallèle de V_0 le long de γ.

2. Soit (M, g) une variété riemannienne fermée, ∇ sa connexion de Levi-Civita, et X un champ de vecteurs sur M. Montrer que

$$g(\nabla_Z X, Y) + g(Z, \nabla_Y X) = 0$$

est vérifiée pour tout $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ si et seulement si le flot de X agit par isométrie.

3. Considérons la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, g_{can})$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et $(\mathbb{H}^n, g_{hyp})$ comme le modèle hyperboloïde avec la métrique induite de $\mathbb{R}^{1,n}$.

a) Vérifier que la géodésique partant de $p \in \mathbb{S}^n$ avec la vitesse v est donnée par l'expression :

$$\gamma_{p,v}(t) = \cos(\|v\|t)p + \frac{\sin(\|v\|t)}{\|v\|}.v$$

b) Vérifier que la géodésique partant de $p \in \mathbb{H}^n$ avec la vitesse v est donnée par l'expression :

$$\gamma_{p,v}(t) = \cosh(\|v\|t)p + \frac{\sinh(\|v\|t)}{\|v\|}.v$$