Remise à niveau maths
Dénombrement et probabilités discrètes.

Marine Lasbleis

September 15, 2011

1 Notions d'ensemble

Si on prend Wikipedia, on trouve que

> En théorie des ensembles, un ensemble désigne intuitivement une collection d'objets (les éléments de l'ensemble), une multitude qui peut être comprise comme un tout (au sens d'omnis).

Un ensemble est, assez simplement, un ensemble de "quelque chose" qui ont une caractéristique commune : l'ensemble des fonctions, l'ensemble des nombres réels, l'ensemble des étudiants d; une même classe; ou un ensemble que l'on définit arbitrairement : $\{1, 2, 3\}$ ou $\{A, B, C, D\}$.

On peut ensuite définir des relations entre les ensembles, des objets dans les ensembles, etc. Faisons un tour des définitions intéressantes :

- **Ensemble fini :** un ensemble fini est un ensemble dont le nombre d'éléments est défini. En particulier, $[1, 2]$ ou $\mathbb{R}$ ne sont <u>pas</u> des ensembles finis, et $\{1, 2\}$ est un ensemble fini (il ne contient que 1 et 2 comme éléments).
- **cardinal d'un ensemble :** nombre d'élément de l'ensemble. Notation : Card(A). Le cardinal n'est défini que pour un ensemble fini.
- $x \in A$: x appartient à A.
- $A \subset B$: A est contenu dans B.
- $B \backslash A$: B excluant A.
- $A \cap B$: A union B (A et B)
- $A \cup B$: A ou B (ou inclusif)
- non$A$: tous les éléments sauf ceux appartenant à A.
- $\varnothing$: ensemble vide.

- P(E) : ensemble des parties de E. Ce sont tous les sous-ensembles que l'on peut former en prenant des éléments de E, ainsi que l'ensemble vide. Par exemple, $E = \{0, 1\}$, $\mathrm{P}(E) = \{\varnothing, \{0, 1\}, \{1\}, \{0\}\}$.
- **Cardinal de deux ensembles finis** :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

2 Dénombrement

Dans le cas d'évènements ayant tous la même probabilité d'apparaître, on peut facilement calculer la probabilité d'apparition d'une série d'évènements, en calculant le nombre total de séries d'évènements possibles, puis le nombre de séries particulières. Il y a deux solutions pour cela : la force brute (écrire toutes les séries possibles) ou la subtilité (le dénombrement).

> **exemple :** lancer 2 dés, noter toutes les combinaisons possibles et calculer la probabilité de l'évènement "la somme des deux dés fait 8". Par contre, il est plus difficile de le faire pour la somme de 100 dés à 100 faces.

La "combinatoire"permet de compter les éléments dans un ensemble fini.

Les exemples classiques de la combinatoire et du dénombrement sont les dés (somme de 3 dés), les cartes à jouer (obtenir 5 cartes rouges, 3 cartes qui se suivent), et les boules blanches et noires (tirer 4 boules noires à la suite dans un panel de 5 boules blanches et 5 boules noires, avec ou sans remise).

2.1 Définitions

- **Permutations**
  - sans répétitions.

    Une permutation sans répétition est simplement la disposition de n objets discernables dans n cases (ordonnées) avec un objet, et un seul, par case.

    > **exemple :** Pour la permutations de 4 objets dans 4 cases, on a : 4 possibilités pour la première case, 3 pour la deuxième, 2 pour la troisième, et une seule pour la dernière. On aura donc 4! possibilités. C'est utile pour regarder le nombre de mots que l'on peut écrire avec des lettres données.

    Le nombre de **permutation sans répétition** de n objets est égal à **n!**.
  - avec répétitions.

    On peut avoir des répétitions (certains objets sont indiscernables), dans ce cas on considère les objets tous discernables, puis on divise par le nombre de permutations identiques car non-discernables.

    > **exemple :** Considérons l'ensemble $\{A, A, B, B, B\}$. Si on le considère avec des objets tous indiscernables, il devient : $\{A_1, A_2, B_1, B_2, B_3\}$. Il y a 5! façons de permuter ce deuxième ensemble. Comme on a 2 répétitions de A, et 3 répétitions de B, on aura compté 2!×3! fois trop de possibilités. On doit donc avoir pour l'ensemble de départ 5!/(2!3!)=10 permutations possibles (vous pouvez vérifier en les écrivant toutes).

Le nombre de **permutations de n éléments pris dans k classes différentes** (k est le nombre d'éléments discernables) avec n_1 répétitions de la classe 1, n_2 de la classe 2, ... et n_k répétitions de la classe k est : **n!/(n1!n2!...nk!)**.

- **Arrangements** Un arrangement est un ordonnancement d'élément sans forcément que le nombre d'élément colle avec la taille de l'ensemble de départ. Par exemple, un mot MOT est un arrangement (ici sans répétition) des lettres de l'alphabet. MOT est aussi une permutation de l'ensemble {T, O, M }, au même titre que TOM et OMT.

  Pour un arrangement, on s'intéressera donc au nombre d'élément de l'espace de départ (n)mais aussi à la taille de l'arrangement (k).

  - sans répétitions.

    Un arrangement sans répétition est très semblables à une permutation dont on tronquerait les éléments au dessus de l'élément k.

    exemple : Pour considérer le nombre de mots de 3 lettres (sans répétition) dans un alphabet de 5 lettres, on peut construire toutes les permutations de l'alphabet de 5 lettres, et regarder combien ont les mêmes 3 premières lettres. Si on prend { A,B,C,D,E } comme alphabet, le mot { A,B,C} apparaîtra deux fois dans les permutations car on peut permuter { D,E} de 2! façons. Donc on a 5!/2! mots de 3 lettres sans répétitions.

    Le nombre **d'arrangements sans répétition** de k éléments pris dans n éléments est donc **n!/(n-k)!**.

  - avec répétitions.

    Pour un arrangement avec répétitions de k éléments parmi n, la seule chose importante est l'ordonnancement. Pour chaque case, on peut choisir parmi les n objets de l'ensemble de départ.

    exemple : Le nombre de mots (sans question d'orthographe ou de prononciation, évidemment) que l'on peut créer avec 3 lettres différentes est simplement $3\times3\times3 = 27$.

    Le nombre **d'arrangements avec répétition** de k éléments pris dans n éléments est donc n^k.

- **Combinaisons sans répétition** Contrairement aux arrangements (et aux permutations, qui sont des cas particuliers des arrangements), les combinaisons sont des dispositions d'objets qui ne tiennent pas compte de l'ordre de placement de ces objets. C'est le cas par exemple quand on tire de façon simultanée des objets (des cartes, des boules de couleur, des dés) et que donc on ne peut décider lequel a été fait en premier.

  Une combinaison sans répétition est en fait une partie de l'ensemble de départ. Pour calculer le nombre de parties de k éléments, on peut calculer le nombre d'arrangements à k éléments (n!/(n-k)!), puis diviser par le nombre d'ordonnancement possible (k!). On notera le **nombre de parties** à k éléments dans un ensemble de n élément comme **"k parmi n"**, le coefficient binomial, qui est noté :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$