Fiche exercices - Fonctions

Exercice 1

Rendre rationnel le dénominateur des expressions suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \qquad \frac{3}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} \qquad \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

Exercice 2

1. *Montrer que* $\{(x,y)\ ,\ x+|y|=2y\}$ *est le graphe d'une fonction* f.
   Donner l'ensemble de définition de cette fonction et exprimer pour $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x)$ *en fonction de* x.
2. *L'ensemble* $\{(x,y)\ ,\ x+|y|=y^2\}$ *est-il le graphe d'une fonction ?*

Exercice 3

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{x+1}$
2. $f(x)=\sqrt{x-x^3}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$
4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$
5. $f(x)=\sqrt{x^2-|x|-2}$
6. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{8}{x}}$

Exercice 4

Déterminer $x \in \mathbb{R}_+^*$ *vérifiant l'équation* (E) *avec*

1. (E) $\quad 5(3^x)=3(5^x)$	2. (E) $\quad x^x=(2x)^{2x}$	3. (E) $\quad x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$

Exercice 5

Déterminer le(s) couple(s) de réels (x,y) *vérifiant le système d'équations* (S) *avec*

1. (S) $\quad \begin{cases} 8^x &= 10^y \\ 2^x &= 5^y \end{cases}$	2. (S) $\quad \begin{cases} 2^{3x}2^{2y} &= 5 \\ 4^{2x} &= 2^{2y+3} \end{cases}$

Exercice 6

Déterminer le(s) couple(s) de réels strictement postitifs (x,y) *vérifiant le système d'équations* (S) *avec*

1. (S) $\quad \begin{cases} xy &= 4 \\ \ln^2(x)+\ln^2(y) &= \dfrac{5}{2}\ln^2(2) \end{cases}$	2. (S) $\quad \begin{cases} x^{x+y} &= y^4 \\ y^{x+y} &= x \end{cases}$

Exercice 7

En utilisant les formules du cours :

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$	$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

démontrer les formules de trigonométrie suivantes :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad , \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2} \quad , \quad \tan^2(a) + 1 = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \quad , \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\textit{en notant : } t = \tan(x/2) \quad , \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \quad , \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\Big) \quad , \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad ; \quad , \quad \cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Exercice 8

Pour chaque fonction, donner son domaine de définition, dire si elle est paire, impaire, périodique, majorée, minorée.

$\cos(x^2)$	$\sin^2(x)$	$\dfrac{2x}{x^2+1}$	$\sinh(x^3-x)$	$\cosh\left(\dfrac{1}{\cos^2(x)-1}\right)$	$\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

Exercice 9

Montrer les équivalences suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \qquad y = \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

$$\forall x \geq 0,\ \forall y \geq 1, \qquad y = \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in\ ]-1,1[, \qquad y = \tanh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$