Fiche exercices - Dérivées

Exercice 1

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

1. *Donner une expression explicite du taux d'accroissement de f en un point a quelconque du domaine de définition.*
2. *Calculer la limite en a de ce taux d'accroissement et retrouver l'expression de la dérivée de f en a.*

a) $f(x) = x^2$	b) $f(x) = \sqrt{x}$	c) $f(x) = x\sqrt{x}$
d) $f(x) = e^x$	e) $f(x) = xe^x$	f) $f(x) = \ln(x)$
g) $f(x) = \sin(x)$	h) $f(x) = \cos(x)$	i) $f(x) = x\sin(x)$

on pourra utiliser $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ *et* $\lim_{t\to 0} t \ln|t| = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t) - 1}{t} = 0$.

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que si f est paire alors f' est impaire.*
2. *Montrer que si f est impaire alors f' est paire.*

Exercice 3

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

1. *Préciser le domaine de définition de f.*
2. *Calculer l'expression de la dérivée de f.*

a) $f(x) = (x(x-2))^{1/3}$	b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$	c) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$
d) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)^3}$	e) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{1/3}}$	f) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
g) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}$	h) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	i) $f(x) = \frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$
j) $f(x) = \sqrt{1+x^2\sin^2(x)}$	k) $f(x) = \frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$	l) $f(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$

Exercice 4

Pour chacune des applications f définies ci-dessous :

1. *Verifiez que f est prolongeable par continuité en 0.*
2. *L'application prolongée est-elle dérivable en 0 ?*

a) $f(x) = x\|x\|$	b) $f(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|}$	c) $f(x) = \dfrac{1}{1+\|x\|}$
d) $f(x) = \cos(\sqrt{\|x\|})$	e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$	f) $f(x) = x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
g) $f(x) = \sqrt{\|x\|}\ln\|x\|$	h) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sqrt{\|x\|}}$	i) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\ln\|x\|}$

on pourra utiliser $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t} = 1$ *et* $\lim\limits_{t\to 0} t\ln|t| = 0$.

Exercice 5

On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, si elle est (continue et) dérivable sur I, et si f' est continue ou prolongeable par continuité sur I.

1. *Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ ax+b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

2. *Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f(1) = 1$.*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ ax^2+bx+c & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

3. *Déterminer les réels a, b, c et d tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ ax^3+bx^2+cx+d & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 6

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$, et deux fonctions f_1 et f_2 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tel que $f_1(x_1) = f_2(x_1)$ et $f_1(x_2) = f_2(x_2)$.
On définit la fonction f ainsi

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < x_1 \\ \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x1} f_1(x) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x1} f_2(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ f_2(x) & \text{si } x \geq x_2 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.