Fiche exercices - Intégration

Exercice 1

Donner les primitives des fonctions suivantes (avec leur domaine de définition) :

1. $f(x) = 6x^2 + 8x + 3$
2. $f(x) = x(x+a)(x+b)$
3. $f(x) = \sqrt{2x}$
4. $f(x) = \dfrac{3}{(8x)^{5/3}}$
5. $f(x) = 3^x e^x$
6. $f(x) = xe^{-(x^2+1)}$
7. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$
9. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$
10. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$
11. $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$
12. $f(x) = \dfrac{6x}{(x^2+1)^3}$
13. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$
14. $f(x) = x\cos(x^2+1)$

Exercice 2

En utilisant l'intégration par parties, déterminer les primitives de :

1. $\ln(x)$
2. $x\ln(x)$
3. $x^2\sin(x)$
4. $x^3\sin(x^2)$
5. $x^2\sinh(x)$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^2 (x^3 - 2x + 5)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^3}{y+2}\,\mathrm{d}y$
5. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{t+2}}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan(x)\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^4 \sinh^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué.

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$ *en posant* $x = \sin^2(t)$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ *en posant* $t = \sin(u)$
3. $\displaystyle\int_{\cosh(2)}^{\cosh(4)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ *en posant* $x = \cosh(u)$

Exercice 5

Soit f une fonction impaire, et a un réel strictement positif tel que $[-a, a] \subset \mathcal{D}_f$.
Montrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 6

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

1. *déterminer les deux réels a et b tels que*

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-1}$$

2. *en déduire les primitives de $f(x)$.*

Exercice 7

Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-x^2}$.

1. *déterminer les trois réels a, b et c tels que*

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$$

2. *en déduire les primitives de $f(x)$.*

Exercice 8

La fonction $f(x) = \sinh(x)$ est continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et sa fonction réciproque est $f^{-1}(x) = \operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

1. *Calculer la dérivée de la fonction $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ puis la dérivée de* $\operatorname{argsinh}(x)$.
2. *En déduire les primitives de* $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ *puis les primitives de* $\sqrt{x^2+1}$.
3. *Calculer* $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+1}}$ *et* $B = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^x \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $J_n = \displaystyle\int_0^x \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Calculer I_0, J_0, I_1, J_1, I_2 et J_2.*
2. *En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour $n \geq 2$, on a*

$$\begin{array}{rcl} nI_n &=& \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)I_{n-2} \\ nJ_n &=& -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)J_{n-2} \end{array}$$

3. *Par un changement de variable adéquat, montrer qu'on peut directement calculer I_n et J_n quand n est impair.*