

Fiche exercices - Equations différentielles

Exercice 1

Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - 4y(x) = 3$ pour $x \in \mathbb{R}$
2. $y'(x) + y(x) = 2e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$
3. $y'(x) - \tan(x)y(x) = \sin(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
4. $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$
5. $(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exercice 2

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'(x) - 2y(x) = 4$, $y(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$
2. $y'(x) = \frac{y(x) + 1}{x}$, $y(1) = 0$, $x > 0$
3. $y'(x) - 2y(x) = 2x$, $y(0) = \frac{1}{4}$, $x \in \mathbb{R}$
4. $x^2y'(x) - (2x - 1)y(x) = x^2$, $y(1) = 1$, $x > 0$
5. $(x + 1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0$, $y(0) = 2$, $x > -1$

Exercice 3

Soit λ un réel non nul, on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - \lambda y(x) = f(x)$$

avec $f(x)$ une fonction particulière.

Déterminer l'expression de la solution générale lorsque :

1. $f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$
2. $f(x) = \alpha e^{\omega x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$
3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$
(indication : chercher la solution particulière sous la forme $y_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$)

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$
2. $y''(x) - y'(x) = 0$
3. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$
4. $y''(x) + 4y(x) + 13y(x) = 0$

Exercice 5

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$
2. $y''(x) + 4y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$
3. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
4. $y''(x) + 3y'(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4x^2$
(indication : chercher la solution particulière sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c$)
2. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 4xe^x$
3. $y''(x) + y(x) = \cos(x)$

Exercice 7

On considère l'équation différentielle $|x|y'(x) + (x - 1)y(x) = x^3$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation précédente pour $x \in]0, +\infty[$.
2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation précédente pour $x \in]-\infty, 0[$.