Fiche exercices (avec corrigés) - Fonctions

Exercice 1

Rendre rationnel le dénominateur des expressions suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \qquad \frac{3}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} \qquad \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

Réponse :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}-2\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{5-8} = -\sqrt{5}-2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}-(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-(\sqrt{5}+\sqrt{2}))} = \frac{\sqrt{7}-(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{7-(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} =$$

$$\frac{\sqrt{7}-(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{7-(5+2+\sqrt{10})} = \frac{\sqrt{7}-(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{-\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{10}\sqrt{7}+\sqrt{10}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{10}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} = \frac{\sqrt[3]{4}^2+\sqrt[3]{4}+1}{(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{4}^2+\sqrt[3]{4}+1)} = \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{\sqrt[3]{4}^3-1} = \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{4-1} = \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt[3]{2}^2-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}^2-\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt{2}-1)} =$$

$$\frac{2^{1/2}(2^{2/3}-2^{1/3}+1)}{(\sqrt[3]{2}^3+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{2^{7/6}-2^{5/6}+2^{1/2}}{3(\sqrt{2}-1)} = \frac{(2^{7/6}-2^{5/6}+2^{1/2})(2^{1/2}+1)}{3(\sqrt{2}-1)(2^{1/2}+1)} =$$

$$\frac{2^{10/6}-2^{8/6}+2+2^{7/6}-2^{5/6}+2^{1/2}}{3(2-1)} = \frac{2^{5/3}-2^{4/3}+2+2^{7/6}-2^{5/6}+2^{1/2}}{3}$$

Exercice 2

1. *Montrer que $\{(x,y)\ ,\ x+|y|=2y\}$ est le graphe d'une fonction f.*
   Donner l'ensemble de définition de cette fonction et exprimer pour $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x)$ en fonction de x.
2. *L'ensemble $\{(x,y)\ ,\ x+|y|=y^2\}$ est-il le graphe d'une fonction ?*

Réponse :

1. Montrons que pour tout réel x, il existe au plus un réel y tel que $x+|y|=2y$.
   — si $x<0$:
      — cas $y \leq 0$: $x+|y|=2y \iff x-y=2y \iff y=x/3$: la valeur $y=x/3$ convient car $x/3<0$
      — cas $y \geq 0$: $x+|y|=2y \iff x+y=2y \iff y=x$: la valeur $y=x$ ne convient pas car $y=x<0$

donc si $x<0$ il existe une unique valeur y : $\boxed{y=x/3}$.

— si $x=0$:
  — cas $y \leq 0$: $x+|y|=2y \iff x-y=2y \iff y=x/3=0$: la valeur $y=0$ convient car $y \leq 0$
  — cas $y \geq 0$: $x+|y|=2y \iff x+y=2y \iff y=x=0$: la valeur $y=0$ convient car $y \geq 0$

  donc si $x=0$ il existe une unique valeur y : $\boxed{y=0}$.

— si $x>0$:
  — cas $y \leq 0$: $x+|y|=2y \iff x-y=2y \iff y=x/3$: la valeur $y=x/3$ ne convient pas car $x/3>0$
  — cas $y>0$: $x+|y|=2y \iff x+y=2y \iff y=x$: la valeur $y=x$ convient car $y=x>0$

  donc si $x>0$ il existe une unique valeur y : $\boxed{y=x}$.

Donc l'ensemble $\{(x,y)/x+|y|=2y\}$ est le graphe d'une fonction f donc le domaine est $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ et donc l'expression est :

$$f(x)=\begin{cases} x/3 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. Raisonnement similaire :
supposons $x<0$ et $y<0$: $x+|y|=y^2 \iff x-y=y^2 \iff y^2+y-x=0$.
Résolvons cette équation en y : $\Delta=\sqrt{1+4x}$, Δ est positif si et seulement si $-1/4 \leq x<0$.
— pour $x=-1/4$, une seule racine $y=-1/2$ qui convient.
— pour $-1/4<x<0$, deux racines :
$y=\dfrac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}<-\dfrac{1}{2}<0$ qui convient.
$y=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$. Regardons le signe de y.
Comme $-1/4<x<0$, $0<1+4x<1 \Rightarrow 0<\sqrt{1+4x}<1$ donc $y=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}<0$ qui convient aussi.
Finalement lorsque $x \in]-1/4,0[$, il existe deux valeurs de y distinctes telles que $x+|y|=y^2$.
Donc l'ensemble $\{(x,y)\ ,\ x+|y|=y^2\}$ ne correspond pas au graphe d'une fonction.

Exercice 3

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{x+1}$
2. $f(x)=\sqrt{x-x^3}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$
4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$
5. $f(x)=\sqrt{x^2-|x|-2}$
6. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{8}{x}}$

Réponse :

1. Il faut que $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$:

$$\boxed{\mathcal{D}_f=[-1,+\infty[}$$

2. Il faut que $x-x^3 \geq 0 \iff x(1-x)(1+x) \geq 0$:

x	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
$1-x$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-x^3$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty,-1] \ \cup\ [0,1]}$$

3. Il faut que $4-x^2 \neq 0 \iff (2-x)(2+x) \neq 0 \iff \left\{ x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \right\}$:

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\} =]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[}$$

4. Il faut que $2+x-x^2 > 0 \iff (2-x)(1+x) > 0$:

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-1,2[}$$

5. Il faut que $x^2-|x|-2 \geq 0$.
   — si $x \leq 0$: $x^2-|x|-2 = x^2+x-2 = (x-1)(x+2) \geq 0 \iff \left\{ x \leq -2 \text{ ou } x \geq 1 \right\}$
   donc $x \leq -2$
   — si $x \geq 0$: $x^2-|x|-2 = x^2-x-2 = (x+1)(x-2) \geq 0 \iff \left\{ x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \right\}$
   donc $x \geq 2$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\} =]-\infty,-2] \ \cup [2,+\infty[}$$

6. Il faut que $x-1 \neq 0$, $x+1 \neq 0$, $x \neq 0$ et $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{8}{x} \geq 0$.

$$g(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{8}{x} = \frac{3(x+1)x + 3(x-1)x - 8(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)x}$$

$$= \frac{3x^2+3x+3x^2-3x-8x^2+8}{(x-1)(x+1)x} = \frac{-2x^2+8}{(x-1)(x+1)x} = \frac{2(2-x)(2+x)}{(x-1)(x+1)x}$$

$g(x)$ a le même signe que le produit $(2-x)(2+x)(x-1)(x+1)x$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
x		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x+1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc $f(x) = \sqrt{g(x)}$ a pour domaine de définition $\mathcal{D}_f =]-\infty,-2\,] \cup]-1,0\,[\cup]1,2\,]$.

Exercice 4

Déterminer $x \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation (E) avec

1. (E) $\quad 5(3^x) = 3(5^x)$	2. (E) $\quad x^x = (2x)^{2x}$	3. (E) $\quad x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Réponse :

1. $5(3^x) = 3(5^x)$

$$\iff \mathrm{e}^{\ln(5)}\mathrm{e}^{x\ln 3} = \mathrm{e}^{\ln(3)}\mathrm{e}^{x\ln 5} \iff \mathrm{e}^{\ln(5)+x\ln 3} = \mathrm{e}^{\ln(3)x+\ln 5} \iff \ln(5) + x\ln 3 = \ln(3)x + \ln 5$$

$$\iff x(\ln 5 - \ln 3) = \ln 5 - \ln 3 \iff x = 1$$

La solution est $\boxed{x = 1}$.

2. $x^x = (2x)^{2x}$

$$\iff \mathrm{e}^{x\ln(x)} = \mathrm{e}^{2x\ln(2x)} \iff x\ln(x) = 2x\ln(2x)$$

$$\underbrace{\iff}_{\text{car } x\neq 0} \ln(x) = 2\ln(2x) \iff \ln(x) = \ln((2x)^2) \iff x = 4x^2 \iff 1 = 4x \iff x = 1/4$$

La solution est $\boxed{x = 1/4}$.

3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

$$\iff \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(x)} = \mathrm{e}^{x\ln(\sqrt{x})} \iff \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x\ln(x) \iff \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right)\ln(x) = 0$$

$$\iff \left\{\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0 \underbrace{\iff}_{\text{car } x\neq 0} 1 = \frac{1}{2}\sqrt{x} \iff x = 4\right\} \text{ ou } \left\{\ln x = 0 \iff x = 1\right\}$$

Les solutions sont $\boxed{x = 1}$ ou $\boxed{x = 4}$.

Exercice 5

Déterminer le(s) couple(s) de réels (x, y) vérifiant le système d'équations (S) avec

1. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} 8^x & = & 10^y \\ 2^x & = & 5^y \end{array}\right.$	2. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} 2^{3x}2^{2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3} \end{array}\right.$

Réponse :

1. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} 8^x & = & 10^y \\ 2^x & = & 5^y \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{e}^{x\ln(8)} & = & \mathrm{e}^{y\ln(10)} \\ \mathrm{e}^{x\ln(2)} & = & \mathrm{e}^{y\ln(5)} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcll} x\ln(8) & = & y\ln(10) & (1) \\ x\ln(2) & = & y\ln(5) & (2) \end{array}\right.$$

$$(1)\ :\ x = y\frac{\ln(10)}{\ln(8)} = y\frac{\ln(10)}{3\ln(2)}$$

$$\Rightarrow\ (2)\ :\ y\frac{\ln(10)}{3\ln(2)}\ln(2) = y\ln(5) \iff y\frac{\ln(10)}{3} - y\ln(5) = 0$$

$$\iff y\left(\frac{\ln(10)}{3} - \ln(5)\right) = 0 \iff y(\ln(10) - 3\ln(5)) = 0 \iff y\underbrace{(\ln(10) - \ln(125))}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ et } x = 0$$

La solution est $\boxed{x = 0\ \ , y = 0}$

2. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} 2^{3x}2^{2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3} \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{e}^{(3x+2y)\ln(2)} & = & \mathrm{e}^{\ln(5)} \\ \mathrm{e}^{2x\ln(4)} & = & \mathrm{e}^{(2y+3)\ln(2)} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} (3x+2y)\ln(2) & = & \ln(5) \\ 2x\ln(4) & = & (2y+3)\ln(2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lclcll} 3\ln(2)x & + & 2\ln(2)y & = & \ln(5) & (1) \\ 2\ln(4)x & - & 2\ln(2)y & = & \ln(2) & (2) \end{array}\right.$$

$$(1)+(2)\ :\ (3\ln(2)+2\ln(4))x = \ln(5)+\ln(2)$$

$$\iff x = \frac{\ln(5\times 2)}{3\ln(2)+2\ln(2^2)} = \frac{\ln(10)}{3\ln(2)+4\ln(2)} = \frac{\ln(10)}{7\ln(2)}$$

$$(2)\ :\ 4\ln(2)x - 2\ln(2)y = \ln(2) \iff 4x+2y=1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} - 2x = \frac{1}{2} - 2\frac{\ln(10)}{7\ln(2)}$$

La solution est $\boxed{x = \dfrac{\ln(10)}{7\ln(2)}\ ,\ y = \dfrac{1}{2} - 2\dfrac{\ln(10)}{7\ln(2)}}$

Exercice 6

Déterminer le(s) couple(s) de réels strictement postitifs (x,y) vérifiant le système d'équations (S) avec

1. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} xy & = & 4 \\ \ln^2(x)+\ln^2(y) & = & \frac{5}{2}\ln^2(2) \end{array}\right.$	2. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} x^{x+y} & = & y^4 \\ y^{x+y} & = & x \end{array}\right.$

Réponse :

1. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} xy & = & 4 \\ \ln^2(x)+\ln^2(y) & = & \frac{5}{2}\ln^2(2) \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcll} y & = & \dfrac{4}{x} & (1) \\ \ln^2(x)+\ln^2(y) & = & \dfrac{5}{2}\ln^2(2) & (2) \end{array}\right.$$

$$(2)\ :\ \ln^2(x)+\ln^2(4/x) = \frac{5}{2}\ln^2(2) \iff \ln^2(x) + (\ln(4)-\ln(x))^2 = \frac{5}{2}\ln^2(2)$$

$$\iff 2\ln^2(x) - 4\ln(2)\ln(x) - \frac{5}{2}\ln^2(2) = 0 \iff 2X^2 - 4\ln(2)X - \frac{5}{2}\ln^2(2) = 0 \text{ avec } X = \ln(x)$$

$$\Delta = 36\ln^2(2) \Rightarrow X = \frac{4\ln(2)\pm 6\ln(2)}{4}$$

$$\iff \left\{X = -\frac{\ln(2)}{2} = \ln(2^{-1/2}) \text{ ou } X = \frac{5\ln(2)}{2} = \ln(2^{5/2})\right\}$$

$$\iff \left\{x = 2^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = 2^{5/2} = 4\sqrt{2}\right\}$$

Si $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ alors $y = \dfrac{4}{x} = 4\sqrt{2}$,

et si $x = 4\sqrt{2}$ alors $y = \dfrac{4}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Les solutions du système sont $\boxed{x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ y = 4\sqrt{2}}$ et $\boxed{x = 4\sqrt{2}\ ,\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

2. (S) $\left\{\begin{array}{rcl} x^{x+y} & = & y^4 \\ y^{x+y} & = & x \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{(x+y)\ln(x)} & = & \mathrm{e}^{4\ln(y)} \\ \mathrm{e}^{(x+y)\ln(y)} & = & \mathrm{e}^{\ln(x)} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcll} (x+y)\ln(x) & = & 4\ln(y) & (1) \\ (x+y)\ln(y) & = & \ln(x) & (2) \end{array}\right.$$

$$(2)\ :\ \ln(x) = (x+y)\ln(y)$$

$$\Rightarrow (1)\ :\ (x+y)(x+y)\ln(y) = 4\ln(y) \iff \Big((x+y)^2 - 4\Big)\ln(y) = 0$$

— cas $\ln(y) = 0$: $y = 1$ et $x = 1$.
— cas $(x+y)^2 - 4 = 0 \iff (x+y+2)(x+y-2) = 0$: $x+y+2 = 0$ ou $x+y-2 = 0$.
On ne peut pas avoir $x+y+2 = 0$ car x et y doivent être strictement positifs.
Reste le cas $x+y-2 = 0 \iff x+y = 2$: le système (S) devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & y^4 \\ y^2 & = & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y^2$$

Comme $x+y-2 = 0$ on obtient l'équation $y^2+y-2 = 0 \iff (y-1)(y+2) = 0$ donc la seule solution possible est $y = 1 > 0$.

La solution du système est $\boxed{x = 1\ ,\ y = 1}$

Exercice 7

En utilisant les formules du cours :

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$	$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

démontrer les formules de trigonométrie suivantes :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}\quad,\quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}\quad,\quad \tan^2(a) + 1 = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)\quad,\quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\textit{en notant : } t = \tan(x/2)\quad,\quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}\quad,\quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\quad,\quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\quad,\quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\Big)\quad,\quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\ ;\ ,\ \cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Réponse :

$$\bullet\ \cos(2a)=\cos(a+a) \begin{array}{l} = \cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a) \\ = \cos^2(a)-\sin^2(a) \\ = \cos^2(a)-1+\cos^2(a)=2\cos^2(a)-1 \\ = 1-\sin^2(a)-\sin^2(a)=1-2\sin^2(a) \end{array}$$

$$\bullet\ 2\cos^2(x)-1=\cos(2a) \iff \cos^2(2a)=\frac{\cos^2(2a)+1}{2}$$

$$\bullet\ 1-2\sin^2(x)=\cos(2a) \iff \sin^2(2a)=\frac{1-\cos^2(2a)}{2}$$

$$\bullet\ \tan^2(a)+1=\frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)}+\frac{\cos^2(a)}{\cos^2(a)}=\frac{\sin^2(a)+\cos^2(a)}{\cos^2(a)}=\frac{1}{\cos^2(a)}$$

$$\bullet\ \sin(2a)=\sin(a+a)=\cos(a)\sin(a)+\sin(a)\cos(a)=2\sin(a)\cos(a)$$

$$\bullet\ \tan(2a)=\frac{\sin(2a)}{\cos(2a)}=\frac{2\sin(a)\cos(a)}{\cos^2(a)-\sin^2(a)}=\frac{\dfrac{2\sin(a)\cos(a)}{\cos^2(a)}}{\dfrac{\cos^2(a)-\sin^2(a)}{\cos^2(a)}}=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\bullet\ \sin(x)=2\sin(x/2)\cos(x/2)=2\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cos^2(x/2)=2t\frac{1}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\bullet\ \cos(x)=\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)=\frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\cos^2(x/2)$$

$$=\left(\frac{\cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}-\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right)\frac{1}{1+t^2}=(1-t^2)\frac{1}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\bullet\ \tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

$$\bullet\ \tan(a+b)=\frac{\sin a+b}{\cos(a+b)}=\frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}=\frac{\dfrac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}$$

$$=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

$$\bullet\ \left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b)=\cos(a)\cos(-b)-\sin(a)\sin(-b) & = & \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b)) & = & \cos(a)\cos(b) \\ \dfrac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)) & = & \sin(a)\sin(b) \end{array}\right.$$

$$\bullet\ \left\{\begin{array}{lcl} \sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b)=\sin(a)\cos(-b)+\cos(a)\sin(-b) & = & \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))=\sin(a)\cos(b)$$

• dans les formules

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cos(b) \qquad \text{et} \qquad \cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos(a)\cos(b)$$

en remplaçant a par $\dfrac{a+b}{2}$ et b par $\dfrac{a-b}{2}$ (donc $a+b$ est remplacé par a, et $a-b$ est remplacé par b), on obtient :

$$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Exercice 8

Pour chaque fonction, donner son domaine de définition, dire si elle est paire, impaire, périodique, majorée, minorée.

$\cos(x^2)$	$\sin^2(x)$	$\dfrac{2x}{x^2+1}$	$\sinh(x^3-x)$	$\cosh\left(\dfrac{1}{\cos^2(x)-1}\right)$	$\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

Réponse :

$f(x) = \cos(x^2)$
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- f est paire
- f n'est pas périodique
- f est minorée et majorée : $\forall x \in \mathcal{D}_f\ ,\ -1 \le f(x) \le 1$

$f(x) = \sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- f est paire
- f est périodique (période $T=\pi$)
- f est minorée et majorée : $\forall x \in \mathcal{D}_f\ ,\ 0 \le f(x) \le 1$

$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- f est impaire
- f n'est pas périodique
- f est minorée et majorée : $\forall x \in \mathcal{D}_f\ ,\ -1 \le f(x) \le 1$ car

$$(x-1)^2 = x^2+1-2x \ge 0 \Rightarrow -(x^2+1) \le 2x \le x^2+1 \Rightarrow -1 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 1$$

$f(x) = \sinh(x^3-x)$
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- f est impaire car

$$f(-x) = \sinh(-x^3+x) = \sinh(-(x^3-x)) = -\sinh(x^3-x) = -f(x)$$

- f n'est pas périodique
- f n'est ni minorée, ni majorée car :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{u\to+\infty}\sinh(u) = \lim_{u\to+\infty}\frac{e^u-e^{-u}}{2} = \frac{+\infty-0}{2} = +\infty$$

Comme f est impaire, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$$f(x) = \cosh\left(\frac{1}{\cos^2(x)-1}\right) = \cosh\left(\frac{1}{-\sin^2(x)}\right) = \cosh\left(\frac{1}{\sin^2(x)}\right) = \cosh\left(\frac{2}{1-\cos(2x)}\right)$$

— $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x \ , \ \cos(2x) = 1\}$

$$= \mathbb{R} \setminus \{2x = 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

— f est paire
— f est périodique (de période $T = \pi$)
— f minorée, mais pas majorée car pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$0 \leq 1 - \cos(2x) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{2}{1-\cos(2x)} \quad \text{(pas de majoration possible)}$$

comme $u \mapsto \cosh(u)$ est strictement croissante pour $u \geq 1$, on a $f(x) \geq \cosh(1)$

$f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

— $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
— f n'est ni paire, ni impaire
— f n'est pas périodique
— f n'est ni minorée, ni majorée car :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{-\infty - 0}{1+0} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{+\infty - 0}{1+0} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

Exercice 9

Montrer les équivalences suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \qquad y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

$$\forall x \geq 0, \ \forall y \geq 1, \qquad y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \,]-1,1[, \qquad y = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Réponse : Le principe est de poser $X = e^x$, et en notant que X est strictement positif.

• $y = \sinh(x)$

$$y = \frac{e^x - 1/e^x}{2} = \frac{X - 1/X}{2} = \frac{X^2-1}{2X}$$
$$\iff 2yX = X^2 - 1 \iff X^2 - 2yX - 1 = 0$$

On résoud l'équation du second degré en X :

$$\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1) > 4y^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{y^2+1} > |y| \geq y$$

Les deux racines sont

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$$

On remarque que $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$ donc seul $X = X_2 = y + \sqrt{y^2+1}$ convient.
D'où $\boxed{x = \ln(X) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})}$

• $y = \cosh(x)$

$$y = \frac{\mathrm{e}^x + 1/\mathrm{e}^x}{2} = \frac{X + 1/X}{2} = \frac{X^2+1}{2X}$$
$$\iff 2yX = X^2 + 1 \iff X^2 - 2yX + 1 = 0$$

On résoud l'équation du second degré en X :

$$\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1) \Rightarrow 0 \leq \sqrt{y^2-1} \leq \sqrt{y^2} = y \quad \text{car } y \geq 1$$

Les deux racines sont

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4y^2-4}}{2} = y - \sqrt{y^2-1} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$$

Comme x doit être supérieur à 0, il faut que X soit supérieur à 1.
On a $X_2 \geq 1$ et $X_1 X_2 = 1 \iff X_1 = 1/X_2 \leq 1$.
Donc seul $X = X_2 = y + \sqrt{y^2-1}$ convient.
D'où $\boxed{x = \ln(X) = \ln(y + \sqrt{y^2-1})}$

• $y = \tanh(x)$

$$y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{X - 1/X}{X + 1/X} = \frac{X^2-1}{X^2+1}$$
$$\iff y(X^2-1) = X^2 + 1 \iff (1-y)X^2 = 1 + y \iff X^2 = \frac{1+y}{1-y}$$

comme $y \in]-1, 1[$, $Y = \dfrac{1+y}{1-y}$ est un réel strictement positif et donc

$$X = \sqrt{Y} \Rightarrow x = \ln(X) = \ln(\sqrt{Y}) = \ln(Y^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln(Y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$