Fiche exercices (avec corrigés) - Dérivées

Exercice 1

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

1. *Donner une expression explicite du taux d'accroissement de f en un point a quelconque du domaine de définition.*
2. *Calculer la limite en a de ce taux d'accroissement et retrouver l'expression de la dérivée de f en a.*

a) $f(x) = x^2$	b) $f(x) = \sqrt{x}$	c) $f(x) = x\sqrt{x}$
d) $f(x) = \mathrm{e}^x$	e) $f(x) = x\mathrm{e}^x$	f) $f(x) = \ln(x)$
g) $f(x) = \sin(x)$	h) $f(x) = \cos(x)$	i) $f(x) = x\sin(x)$

on pourra utiliser $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = 1$ *et* $\lim\limits_{t\to 0} t\ln|t| = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos(t)-1}{t} = 0$.

Réponse :

a) $f'(x) = 2x$

$$\tau_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$

$$\lim_{x\to a} \tau_a(x) = a + a = 2\,a$$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\tau_a(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{a}^2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\lim_{x\to a} \tau_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

c) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

$$\tau_a(x) = \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{a} + x\sqrt{a} - a\sqrt{a}}{x - a} = x\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} + \sqrt{a}\frac{x - a}{x - a} = x\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt{a}$$

$$\lim_{x\to a} \tau_a(x) = a\frac{1}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{3}{2}\sqrt{a}$$

d) $f'(x) = e^x$

$$\tau_a(x) = \frac{e^x - e^a}{x - a} = \frac{e^a(e^{x-a} - 1)}{x - a} = e^a\frac{e^{x-a} - 1}{x - a}$$

$$\lim_{x\to a} \tau_a(x) = e^a \lim_{x\to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^a \times 1 = e^a \qquad (t = x - a)$$

e) $f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$

$$\tau_a(x) = \frac{xe^x - ae^a}{x-a} = \frac{xe^x - xe^a + xe^a - ae^a}{x-a} = x\frac{e^x - e^a}{x-a} + e^a = xe^a\frac{e^{x-a}-1}{x-a} + e^a$$

$$\lim_{x\to a} \tau_a(x) = ae^a + e^a$$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\tau_a(x) = \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x-a} = \frac{\ln(x-a+a) - \ln(a)}{x-a} = \frac{\ln\left(\dfrac{x-a+a}{a}\right)}{a\dfrac{x-a}{a}} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{x-a}{a}\right)}{a\dfrac{x-a}{a}}$$

$$(t = \frac{x-a}{a}) \qquad \tau_a(x) = \frac{\ln(1+t)}{at} \Rightarrow \lim_{x\to a}\tau_a(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{a}\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{a}$$

g) $f'(x) = \cos(x)$

$$\tau_a(x) = \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x-a} = \frac{\sin((x-a)+a) - \sin(a)}{x-a}$$

$$= \frac{\sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) - \sin(a)}{x-a} = \cos(a)\frac{\sin(x-a)}{x-a} + \sin(a)\frac{\cos(x-a)-1}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}\tau_a(x) = \lim_{t\to 0}\ \cos(a)\frac{\sin(t)}{t} + \sin(a)\frac{\cos(t)-1}{t} = \cos(a) \qquad (t = x-a)$$

h) $f'(x) = -\sin(x)$

$$\tau_a(x) = \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x-a} = \frac{\cos((x-a)+a) - \cos(a)}{x-a}$$

$$= \frac{\cos(x-a)\cos(a) - \sin(x-a)\sin(a) - \cos(a)}{x-a} = \cos(a)\frac{\cos(x-a)-1}{x-a} - \sin(a)\frac{\sin(x-a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}\tau_a(x) = \lim_{t\to 0}\ \cos(a)\frac{\cos(t)-1}{t} - \sin(a)\frac{\sin(t)}{t} = -\sin(a) \qquad (t = x-a)$$

i) $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$$\tau_a(x) = \frac{x\sin(x) - a\sin(a)}{x-a} = \frac{x\sin(x) - x\sin(a) + x\sin(a) - a\sin(a)}{x-a} = x\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} + \sin(a)$$

$$\lim_{x\to a}\tau_a(x) = a\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} + \sin(a) = a\cos(a) + \sin(a)$$

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que si f est paire alors f' est impaire.*
2. *Montrer que si f est impaire alors f' est paire.*

Réponse :

1. f paire : $f(-x) = f(x)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(-a) = \lim_{t \to -a} \frac{f(t) - f(-a)}{t - (-a)} = \lim_{t \to -a} \frac{f(t) - f(a)}{t + a}$$

$$\underbrace{=}_{x=-t} \lim_{x \to a} \frac{f(-x) - f(a)}{-x + a} = \lim_{x \to a} -\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -f'(a)$$

2. f impaire : $f(-x) = -f(x)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(-a) = \lim_{t \to -a} \frac{f(t) - f(-a)}{t - (-a)} = \lim_{t \to -a} \frac{f(t) + f(a)}{t + a}$$

$$\underbrace{=}_{x=-t} \lim_{x \to a} \frac{f(-x) + f(a)}{-x + a} = \lim_{x \to a} \frac{-f(x) + f(a)}{-x + a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Exercice 3

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

1. *Préciser le domaine de définition de f.*
2. *Calculer l'expression de la dérivée de f.*

a) $f(x) = (x(x-2))^{1/3}$	b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$	c) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$
d) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)^3}$	e) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{(x+1)^{1/3}}$	f) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}}$	h) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$	i) $f(x) = \dfrac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$
j) $f(x) = \sqrt{1 + x^2 \sin^2(x)}$	k) $f(x) = \dfrac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}$	l) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)}\right)$

Réponse :

a) $f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ avec $f_1(x) = x(x-2)$ et $f_2(x) = x^{1/3}$.
$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}_+$: $\mathcal{D}_f = \{x\ ,\ f_1(x) = x(x-2) \geq 0\} =]-\infty, 0]\ \cup\ [2, +\infty[$

$$f'(x) = f_1'(x) f_2'(f_1(x)) = (2x - 2)\frac{1}{3}(x(x-2))^{1/3-1} = \frac{2(x-1)}{3(x(x-2))^{2/3}}$$

b) $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$, $f(x) = x^{-2/3} - x^{-2/3} = 0$ donc f dérivable et $f'(x) = 0$.

c) $f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ avec $f_1(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ et $f_2(x) = \sqrt{x}$.
$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$ car $x^2 + 1 \geq 0$.
$\mathcal{D}_f = \{x\ ,\ x^2 + 1 \geq 0$ et $x + \sqrt{x^2+1} \geq 0\}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x + \sqrt{x^2} > 0$$

donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = f_1'(x)f_2'(f_1(x)) = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$
$$= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$$

d) $f(x) = (x^2+1)^{3/2}$: $f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ avec $f_1(x) = x^2+1$, $f_2(x) = x^{3/2}$.
$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$, $f_1(x) \geq 1 > 0$ ($f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$) et $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}_+$ donc $f(x)$ défini pour tout x : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = f_1'(x)f_2'(f_1(x)) = 2\ x\ \frac{3}{2}(x^2+1)^{3/2-1} = 3x(x^2+1)^{1/2} = 3x\sqrt{x^2+1}$$

e) $f(x) = (1+\sqrt{x})(x+1)^{-1/3}$:
- le domaine de $x \mapsto 1+\sqrt{x}$ est $D_1 = \mathbb{R}_+$,
- le domaine de $x \mapsto (x+1)^{-1/3}$ est $D_2 =]-1, +\infty[$,
- donc $\mathcal{D}_f = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R}_+$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)^{-1/3} + (1+\sqrt{x})\left(-\frac{1}{3}\right)(x+1)^{-4/3}$$
$$= \frac{3(x+1)}{6\sqrt{x}(x+1)^{4/3}} - \frac{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}{6\sqrt{x}(x+1)^{4/3}} = \frac{3x+3-2\sqrt{x}-2x}{6\sqrt{x}(x+1)^{4/3}}$$
$$= \frac{3+x-2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}(x+1)^{4/3}}$$

f) f est définie pour $x+\sqrt{x^2+1} > 0$ et $x^2+1 \geq 0$

$$x^2+1 > x^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1} \geq 0$$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}}$

$$f_1(x) = x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

$$f_2(x) = x^2-x+1 = x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

donc $f(x)$ est défini sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)} \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}}}$$

$$= \frac{(2x+1)(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}$$

$$= \frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$$

h) $f(x) = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \Rightarrow f$ définie pour $x \neq 0$ et $1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$:
$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow g'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(x)\exp(g(x)) = g'(x)f(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

i) f définie pour $x > 0$ et $x - \ln(x) \neq 0$.
Soit $g(x) = x - \ln(x)$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

On trace le tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

donc $g(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$.

Donc $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x-\ln(x)) - \left(1-\frac{1}{x}\right)(x+\ln(x))}{(x-\ln(x))^2} = 2\frac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2}$$

j) $1 + x^2\sin^2(x) \geq 1 < 0$ donc f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$g(x) = 1 + x^2\sin^2(x) \Rightarrow g'(x) = 2x\sin^2(x) + 2x^2\sin(x)\cos(x) = 2x\sin(x)\Big(\sin(x) + x\cos(x)\Big)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{x\sin(x)\Big(\sin(x)+x\cos(x)\Big)}{\sqrt{1+x^2\sin^2(x)}}$$

k) f est définie pour $x \neq 0$ et $e^{1/x} - 1 \neq 0$

$$e^{1/x} - 1 = 0 \iff e^{1/x} = 1 \iff 1/x = 0 \text{ impossible}$$

donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

$$g(x) = e^{1/x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)(g(x)-1) - g'(x)(g(x)+1)}{(g(x)-1)^2}$$

$$= \frac{-2g'(x)}{(g(x)-1)^2} = \frac{2e^{1/x}}{x^2\left(e^{1/x}-1\right)^2}$$

l) f définie pour $1 - \sin(x) \neq 0$ et $\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} > 0$

$$1 - \sin(x) \neq 0 \iff \sin(x) \neq 1 \iff x \neq \pi/2 + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1+\sin(x) & \geq & 0 \\ 1-\sin(x) & \geq & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} \geq 0$$

donc il faut que $1+\sin(x) \neq 0 \iff \sin(x) \neq -1 \iff x \neq -\pi/2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

$$f(x) = \ln(u(x)) \text{ avec } u(x) = \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ et } u'(x) = \frac{\cos(x)(1-\sin(x)) + \cos(x)(1+\sin(x))}{(1-\sin(x))^2} = \frac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)} = \frac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))} = \frac{2\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \frac{2\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2}{\cos(x)}$$

Exercice 4

Pour chacune des applications f définies ci-dessous :

1. *Verifiez que f est prolongeable par continuité en 0.*
2. *L'application prolongée est-elle dérivable en 0 ?*

a) $f(x) = x\|x\|$	b) $f(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|}$	c) $f(x) = \dfrac{1}{1+\|x\|}$
d) $f(x) = \cos(\sqrt{\|x\|})$	e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$	f) $f(x) = x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
g) $f(x) = \sqrt{\|x\|}\ln\|x\|$	h) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{\sqrt{\|x\|}}$	i) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\ln\|x\|}$

on pourra utiliser $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t} = 1$ *et* $\lim\limits_{t\to 0} t\ln|t| = 0$.

Réponse :

a) $f(x)$ produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc f continue sur $\mathbb{R}$ et donc en 0.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2\,x & \text{si } x<0 \\ 2\,x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

On peut prolonger f' par continuité en $x=0$ car :

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -2\,x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\,x = 0$$

La fonction prolongée est

$$\overline{f'}(x) = \left.\begin{cases} -2\,x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 2\,x & \text{si } x>0 \end{cases}\right\} = 2\,|x|$$

b) $f(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ (car $1+|x|$ continue et >0), donc f continue en 0.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

On peut prolonger f' par continuité en $x=0$ car :

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(1+x)^2} = 1$$

La fonction prolongée est

$$\overline{f'}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{(1+|x|)^2}$$

c) $f(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ (car $1+|x|$ continue et >0), donc f continue en 0.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$$

On ne peut pas prolonger f' par continuité en $x = 0$ car :

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{(1+x)^2} = -1$$

d) $f(x)$ continue sur $\mathbb{R}$, donc f continue en 0.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \cos(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{t} = \frac{1}{2} \qquad (t = \sqrt{-x})$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}} = \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{t} = -\frac{1}{2} \qquad (t = \sqrt{x})$$

les deux limites sont différentes donc f' n'est pas prolongeable par continuité en 0.

e) $\mathcal{D}_f = [1, 0[\cup]0, 1]$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{2\,x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1$$

donc f prolongeable par continuité en 0 : $\overline{f}(0) = 1$.
La fonction $\overline{f}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$ donc $\overline{f}'(x)$ définie

et continue en $x = 0$, donc f' est prolongeable par continuité en 0.

f) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^0$.
f est prolongeable par continuité en x car

$$0 \leq |f(x)| \leq x^2 \text{ et } \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 mais $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.
Donc on ne peut pas prolonger f' par continuité en 0.

g) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ et f est paire.
f est prolongeable par continuité en $x = 0$ car

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{t\to 0^+} t\ln(t^2) = 2\lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0 \quad (\text{ en posant } t = \sqrt{|x|}\ )$$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(-x)+2}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

mais f' n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$ car :

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \frac{-\infty + 2}{0+} = +\infty$$

h) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
f est prolongeable par continuité en $x = 0$ car

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\frac{x}{\sqrt{|x|}} = 1 \times 0 = 0$$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ mais n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$ car :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt(x)} - \frac{e^x - 1}{2x\sqrt(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(e^x - \frac{e^x - 1}{2x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(e^x - \frac{e^x-1}{2x}\right) = +\infty\left(1-\frac{1}{2}\right) = +\infty\frac{1}{2} = +\infty$$

f' n'a pas de limite finie en 0 .

i) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{\infty} = 0$$

donc f est prolongeable par continuité en 0.

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\ln|x|} - \frac{\sin(x)}{x\ln|x|^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\ln|x|} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\ln|x|^2} = \frac{1}{\infty} - 1\frac{1}{\infty} = 0$$

donc f' est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5

On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, si elle est (continue et) dérivable sur I, et si f' est continue ou prolongeable par continuité sur I.

1. *Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \le 0 \\ ax+b & si \quad x > 0 \end{cases}$$

2. *Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f(1) = 1$.*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \le 0 \\ ax^2+bx+c & si \quad x > 0 \end{cases}$$

3. *Déterminer les réels a, b, c et d tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \le 0 \\ ax^3+bx^2+cx+d & si \quad 0 < x < 1 \\ x & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Réponse :

1. Pour $x \le 0$, $f'(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.
   Pour $x > 0$, $f'(x) = a$: il faut prolonger par continuité f et f' en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = b = f(0) = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f'(x) = a = f'(0) = 1$$

   donc $a = b = 1$ et $f(x) = x+1$ lorsque $x > 0$.

2. Pour $x \le 0$, $f'(x) = 1 \Rightarrow f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.
   Pour $x > 0$, $f(1) = a+b+c = 1$.
   Il faut aussi prolonger par continuité f et f' en 0 : $f'(x) = 2ax+b$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = c = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f'(x) = b = 1$$

   donc $a = -1$, $b = c = 1$ et $f(x) = -x^2+x+1$ lorsque $x > 0$.

3. Pour $x \leq 0$, $f'(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
Pour $x \geq 1$, $f'(x) = 1 \Rightarrow f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$.
Pour $0 < x < 1$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$:
— il faut prolonger par continuité f et f' en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = d = f(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \to 0^+} f'(x) = c = f'(0) = 0$$

donc $c = 0$ et $d = 1$.
— il faut prolonger par continuité f et f' en 1 :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = a + b + c + d = f(1) = 1 \text{ et } \lim_{x \to 1^-} f'(x) = 3a + 2b + c = f'(0) = 1$$

donc $a = 1$ et $b = -1$.
Donc pour $0 < x < 1$, $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

Exercice 6

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$, et deux fonctions f_1 et f_2 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tel que $f_1(x_1) = f_2(x_1)$ et $f_1(x_2) = f_2(x_2)$.
On définit la fonction f ainsi

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < x_1 \\ \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x1} f_1(x) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x1} f_2(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ f_2(x) & \text{si } x \geq x_2 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Réponse :
• La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car :
— de par sa définition, elle continue sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$,
— prolongeable par continuité en x_1 car

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = \lim_{x \to x_1^-} f_1(x) = f_1(x_1)$$

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) = f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} f_1(x_1) + \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} f_2(x_1) = f_1(x_1)$$

donc on a bien

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = \lim_{x \to x_1^+} f(x) = f(x_1) = f_1(x_1)$$

— prolongeable par continuité en x_2 car

$$\lim_{x \to x_2^-} f(x) = f(x_2) = \frac{x_2 - x_2}{x_2 - x_1} f_1(x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} f_2(x_2) = f_2(x_2)$$

$$\lim_{x \to x_2^+} f(x) = \lim_{x \to x_2^+} f_2(x) = f_2(x_2)$$

donc on a bien

$$\lim_{x \to x_2^-} f(x) = \lim_{x \to x_2^+} f(x) = f(x_2) = f_2(x_2)$$

• La dérivée de f est donc définie par

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) & \text{si } x < x_1 \\ \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f_1'(x) - f_1(x) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_2'(x) + f_2(x) & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ f_2'(x) & \text{si } x > x_2 \end{cases}$$

— on peut prolonger par continuité la fonction f' en $x = x_1$ avec $f'(x_1) = f_1'(x_1)$ car

$$\lim_{x \to x_1^-} f'(x) = f_1'(x_1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1^+} f'(x) &= \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} f_1'(x_1) - f_1(x_1) + \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} f_2'(x_1) + f_2(x_1) \\ &= f_1'(x_1) \underbrace{- f_1(x_1) + f_2(x_1)}_{=0} = f_1'(x_1) \end{aligned}$$

— on peut prolonger par continuité la fonction f' en $x = x_2$ avec $f'(x_2) = f_2'(x_2)$ car

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_2^-} f'(x) &= \frac{x_2 - x_2}{x_2 - x_1} f_1'(x_2) - f_1(x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} f_2'(x_2) + f_2(x_2) \\ &= \underbrace{- f_1(x_2) + f_2(x_2)}_{=0} + f_2'(x_2) = f_2'(x_2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to x_2^+} f'(x) = f_2'(x_2)$$

• Un exemple (f_1 en vert, f_2 en rouge et f en noir)