Nombres en informatique

1 - Codage des nombres en informatique

Mémoire d'un ordinateur : suite de *chiffres binaires* ou *bits* (chiffre binaire : 0 ou 1)
$\rightarrow$ codage de l'information à l'aide de 0 et de 1

1.1 - Codages des nombres naturels

• Nombre entier naturel n exprimé en base 10 : $\boxed{c_{p-1} \mid c_{p-2} \mid \ldots \mid c_2 \mid c_1 \mid c_0}$
avec $c_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et p le nombre de chiffres décimaux dans l'écriture de n.

Valeur de $n = c_0 + 10c_1 + 100c_2 + \cdots + 10^{p-2}c_{p-2} + 10^{p-1}c_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k c_k$.

• Nombre entier naturel n codé sur un ordinateur : utilisation de l'écriture en base 2 et avec une valeur de p fixée.
Exemple : $(p = 8)$ codage d'un nombre n $\boxed{b_7 \mid b_6 \mid b_5 \mid b_4 \mid b_3 \mid b_2 \mid b_1 \mid b_0}$ avec $b_k \in \{0, 1\}$

$\rightarrow$ valeur de $n = b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 + 16b_4 + 32b_5 + 64b_6 + 128b_7 = \sum_{k=0}^{7} 2^k b_k$

Exercice 1 :

Avec le codage binaire avec $p = 8$ chiffres binaires, quelles sont les valeurs minimale et maximale que l'on peut coder ?

• Utilisation de différents codages correspondant à des valeurs de p standard ($p = 8$, $p = 16$, $p = 32$, $p = 64$, ...).

Codage $\boxed{b_{p-1} \mid b_p \mid \ldots \mid b_1 \mid b_0}$ $\iff$ valeur $v = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k b_k$

$\rightarrow$ représentation de tous les nombres naturels $\in \{0, 1, \ldots, 2^p - 1\}$

1.2 - Codages des nombres réels

Utilisation d'un codage par signe, mantisse et exposant.
• Exemple du codage sur ordinateur d'un *réel flottant* sur 64 *bits*.
— signe s codé sur 1 bit : $s = 0$ ou $s = 1$,
— exposant e codé sur 11 bits : $0 \leq e \leq 2^{11} - 1 = 2047$
— mantisse m codé sur 52 bits : $0 \leq m \leq 2^{52} - 1 = 4503599627370495 \simeq 4,5 \times 10^{15}$.

• Calcul de la valeur v correspondant à un codage $[s, e, m]$ sur 64 bits :
cas $e = 0$:

$$v = (-1)^s \times \left(0 + \frac{m}{2^{52}}\right) \times 2^{-1022} = (-1)^s \times m \times 2^{-1074}$$

cas $1 \leq e \leq 2046$:

$$v = (-1)^s \times \left(1 + \frac{m}{2^{52}}\right) \times 2^{-1023+e} = (-1)^s \times \left(2^{52} + m\right) \times 2^{-1075+e}$$

cas $e = 2047$: codage de valeurs non numériques, par exemple $-\infty$ et $+\infty$.

Exemple :

	Codage	*Valeur*
s	0	0
e	00000000000	0
m	0000000000000000000000000000000000000000000000000000	0

$\rightarrow v = (-1)^0 \times 0 \times 2^{-1074} = 0$

Exemple :

	Codage	*Valeur*
s	1	1
e	10000000101	$2^{10} + 2^2 + 2^0 = 1029$
m	1001010000000000000000000000000000000000000000000000	$2^{51} + 2^{48} + 2^{46}$

$$\rightarrow v = (-1)^1 \times (2^{52} + 2^{51} + 2^{48} + 2^{46}) \times 2^{-1075+1029} = -(2^{52} + 2^{51} + 2^{48} + 2^{46}) \times 2^{-46}$$

$$= -(2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^0) = -101$$

Exercice 2 :

> Quelle est la plus petite valeur réelle strictement positive que l'on représenter avec ce codage, et donner l'ordre de grandeur correspondant sous forme d'une puissance de 10.
> Question similaire avec la plus grande valeur réelle.

- Calcul du codage $[s, e, m]$ sur 64 bits à partir d'une valeur réelle v
  1. déterminer le signe s :
     — si $v \geq 0$ alors $s = 0$
     — sinon $s = 1$ et remplacer v par $|v| = -v$
  2. déterminer ensuite l'exposant e puis la mantisse m en fonction de e :
     — si $v < 2^{-1022}$ alors $e = 0$ et $M = [v \times 2^{1074}] = \text{partie\_entiere}(v \times 2^{1074})$
     $\Rightarrow 0 \leq M \leq 2^{52} - 1 : m = M$.
     — si $2^{-1022} \leq v < 2^{1024}$ alors
     $e \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-1023+e} \leq v < 2^{-1022+e}$ et $M = [v \times 2^{1075-e}]$
     $\Rightarrow 2^{52} \leq M \leq 2^{53} - 1 : m = M - 2^{52}$.
     — si $v \geq 2^{1024}$ alors v considérée comme ∞ :
     $\rightarrow$ codage avec $e = 2047$ et $m = 0$.

Exemple : $v = 0,3$

1. signe positif : $s = 0$.
2. $0,25 = 2^{-2} \leq 0,3 < 2^{-1} = 0,5 \Rightarrow e = 1021$
   $\rightarrow M = [v \times 2^{54}] = 5404319552844595 \Rightarrow m = M - 2^{52} = 900719925474099$

$\rightarrow$

	Codage	*Valeur*
s	0	0
e	01111111101	1021
m	0011001100110011001100110011001100110011001100110011	900719925474099

$\Rightarrow$ valeur correspondant à ce codage : $v' = (-1)^0 \times (2^{52} + 900719925474099) \times 2^{-1075+1021}$
$= 0,299999999999999988897769753748434595763683319091796875$