Interpolation

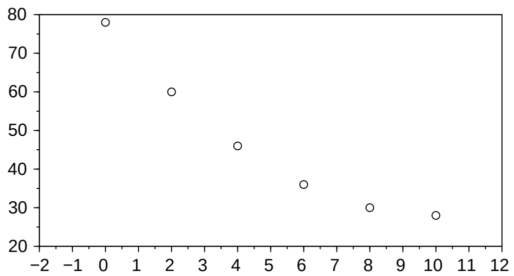
Interpolation :

Données (t_k, y_k) avec $1 \leq k \leq N$	$\longrightarrow$	Fonction <u>continue</u> $y = f(t)$ telle que pour tout k, $1 \leq k \leq N$: $y_k = f(t_k)$

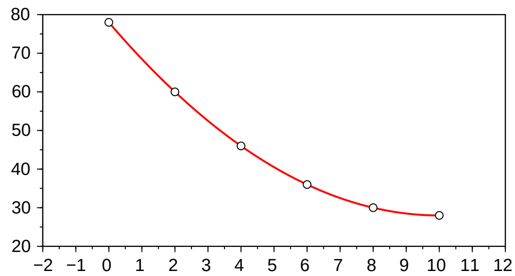
Exemple : Température y_k d'une pièce de métal à différents instants t_k :

indice k de la mesure	1	2	3	4	5	6
temps t_k (en minutes)	0	2	4	6	8	10
température y_k (en degrés Celsius)	78	60	46	36	30	28

Exemple de fonction interpolant les données : $f(t) = \dfrac{t^2}{2} - 10t + 78$.



Données (t_k, y_k)



Fonction interpolant les données

1 - Interpolation linéaire par intervalle (par morceaux)

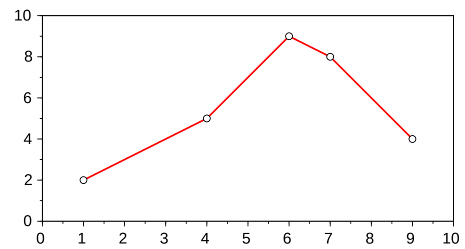
"Construction" de f *intervalle par intervalle* (*par morceaux*).

Exemple : avec les 5 données suivantes

k	1	2	3	4	5
t_k	1	4	6	7	9
y_k	2	5	9	8	4

la fonction f est définie sur 4 intervalles :

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } t \in [1,4] \\ 2t-3 & \text{si } t \in [4,6] \\ -t+15 & \text{si } t \in [6,7] \\ -2t+22 & \text{si } t \in [7,9] \end{cases}$$



Fonction interpolant les données

Pour chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, déterminer l'expression de $y = f(t) = a\,t + b$

Exercice 1 :

sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ avec $1 \leq k \leq N-1$, déterminer (à partir de t_k, t_{k+1}, y_k, y_{k+1}) les expressions des coefficients a et b tel que $y = f(t) = a\,t + b$ vérifie $\begin{cases} f(t_k) & = & y_k \\ f(t_{k+1}) & = & y_{k+1} \end{cases}$

2 - Interpolation parabolique

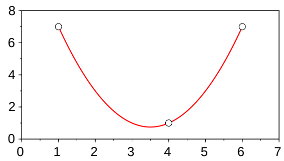
Interpolation de 3 données (t_1, y_1), (t_2, y_2) et (t_3, y_3) (avec $t_1 < t_2 < t_3$) par une fonction $f(t) = at^2 + bt + c$ avec $t \in I = [t_1, t_3]$.

$$a = \frac{\dfrac{y_3 - y_2}{t_3 - t_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}}{t_3 - t_1} \quad , \quad b = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} - a(t_1 + t_2) \quad , \quad c = y_1 - at_1^2 - bt_1$$

Exemples :

Données

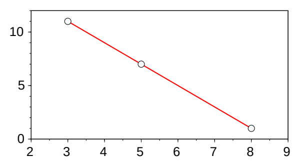
t_k	1	4	6
y_k	7	1	7



$f(t) = t^2 - 7t + 13$

Données

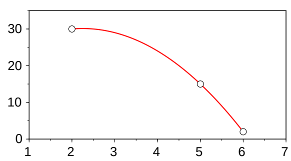
t_k	3	5	8
y_k	11	7	1



$f(t) = -2t + 17$

Données

t_k	2	5	6
y_k	30	15	2



$f(t) = -2t^2 + 9t + 20$

3 - Interpolation cubique par intervalle (par morceaux)

Interpolation des données par une fonction définie *intervalle par intervalle* ainsi :

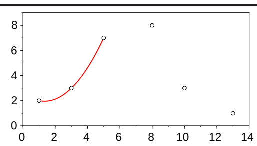
1. appliquer la méthode d'interpolation *parabolique* en considérant les données par série de trois consécutives :
   - $\{(t_1, y_1), (t_2, y_2), (t_3, y_3)\} \to$ fonction $f_2(t)$: $f_2(t_1) = y_1$, $f_2(t_2) = y_2$, $f_2(t_3) = y_3$,
   - $\{(t_2, y_2), (t_3, y_3), (t_4, y_4)\} \to$ fonction $f_3(t)$: $f_3(t_2) = y_2$, $f_2(t_3) = y_3$, $f_2(t_4) = y_4$,

     $\vdots$
   - $\{(t_{N-2}, y_{N-2}), (t_{N-1}, y_{N-1}), (t_N, y_N)\} \to$ fonction $f_{N-1}(t)$: $f_{N-1}(t_{N-2}) = y_{N-2}$, $f_{N-1}(t_{N-1}) = y_{N-1}$, $f_{N-1}(t_N) = y_N$
2. compléter en posant $f_1 = f_2$ et $f_N = f_{N-1}$: $\forall k$, $1 \leq k \leq N$, $f_k(t_k) = y_k$
3. fonctions f_1, f_2, ..., $f_N \to$ fonction f définie ainsi :
   - sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ avec $1 \leq k \leq N-1$: $f(t) = \dfrac{(t_{k+1} - t)f_k(t) + (t - t_k)f_{k+1}(t)}{t_{k+1} - t_k}$

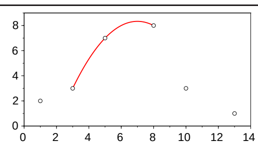
f polynome de degré 3 sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, et de classe C^1 sur $[t_1, t_N]$.

Exemple : 6 données :

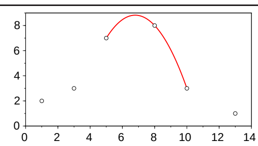
t_k	1	3	5	8	10	13
y_k	2	3	7	8	3	1



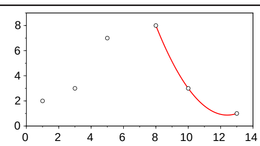
$f_1 = f_2$ définie sur l'intervalle $[t_1, t_3]$



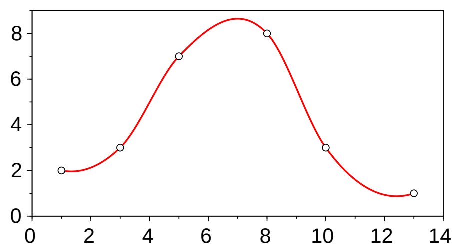
f_3 définie sur l'intervalle $[t_2, t_4]$



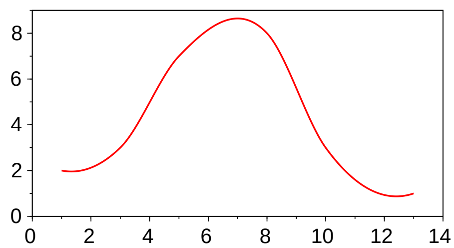
f_4 définie sur l'intervalle $[t_3, t_5]$



$f_6 = f_5$ définie sur l'intervalle $[t_4, t_6]$



La fonction f et les données



La fonction f seule