# Intégration numérique

## Présentation

Calculer (de manière approchée) $A = \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ en remplaçant $f$ par une fonction $g$ proche de $f$ et dont on sait calculer de manière exacte l'intégrale sur $I = [a, b]$ .

Principe général : découper l'intervalle $I$ en $n$ sous-intervalles $I_k$ de même longueur $h$,

$$h = \frac{b-a}{n} \quad , \quad t_k = a + k\ h \text{ pour } 0 \le k \le n \quad , \quad I_k = [t_{k-1}, t_k] \text{ pour } 1 \le k \le n$$

sur chaque sous-intervalle $I_k$, remplacer $f$ par une fonction $g$ proche de $f$ et pour laquelle on connait une primitive $G$ :

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k \simeq \overline{A} = \sum_{k=1}^{n} \overline{A}_k \quad \text{avec} \quad A_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\ \mathrm{d}t \ \text{ et } \ \overline{A}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)\ \mathrm{d}t = G(t_k) - G(t_{k-1})$$

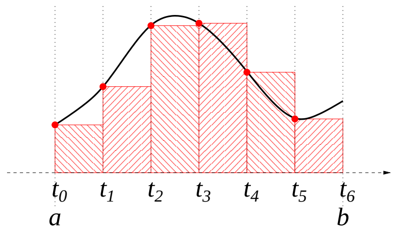
## 1 - Méthode des rectangles

Sur chaque sous-intervalle $I_k = [t_{k-1}, t_k]$,
remplacer $y = f(t)$ par $y = g(t) = C_k = f(s_k)$ avec $s_k \in I_k$.

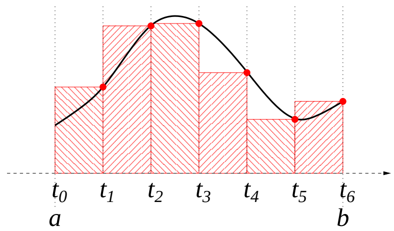
$$\overline{A}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} C_k\ \mathrm{d}t = [C_k\ t]_{t_{k-1}}^{t_k} = C_k\ t_k - C_k\ t_{k-1} = C_k\ h \Rightarrow \overline{A} = h \sum_{k=1}^{n} C_k = h(C_1 + C_2 + \cdots + C_n)$$

Cas possibles pour $C_k$ :

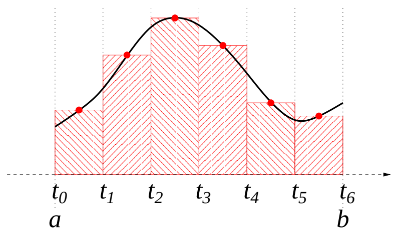
1. valeur de la fonction à gauche de l'intervalle $I_k$ :
   $C_k = f(t_k) = f(a + k\ h)$
   $$A \ \simeq\ \overline{A} = h \sum_{k=1}^{n} f(a + (k-1)h)$$




2. valeur de la fonction à droite de l'intervalle $I_k$ :
   $C_k = f(t_{k+1}) = f(a + (k+1)\ h)$
   $$A \ \simeq\ \overline{A} = h \sum_{k=1}^{n} f(a + k\ h)$$




3. valeur de la fonction au milieu de l'intervalle $I_k$ :
   $$C_k = f\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) = f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)\ h\right)$$
   $$A \ \simeq\ \overline{A} = h \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{2\ k - 1}{2} h\right)$$




**Exercice 1 :**

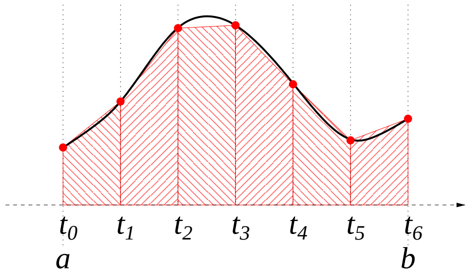
Calculer $A$ pour $f(t) = t^2$ et $I = [a, b] = [-4, 8]$ puis pour chaque des trois cas ci-dessus, calculer $\overline{A}$ avec $n = 6$.

## 2 - Méthode des trapèzes

Sur chaque sous-intervalle $I_k = [t_{k-1}, t_k]$,
remplacer $y = f(t)$ par la fonction

$$g(t) = \alpha\,(t - t_{k-1}) + \beta$$

qui interpole les données $(t_{k-1}, f(t_{k-1}))$ et $(t_k, f(t_k))$.




**Exercice 2 :**

1. Déterminer les coefficients $\alpha$ et $\beta$ à partir de $t_{k-1}$, $t_k$, $f(t_{k-1})$ et $f(t_k)$
2. Calculer $\overline{A}_k = \displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(t)\,\mathrm{d}t$ , et en déduire l'expression de $\overline{A}$ .

**Exercice 3 :**

Calculer $\overline{A}$ pour $f(t) = t^2$, $I = [a, b] = [-4, 8]$ et $n = 6$.

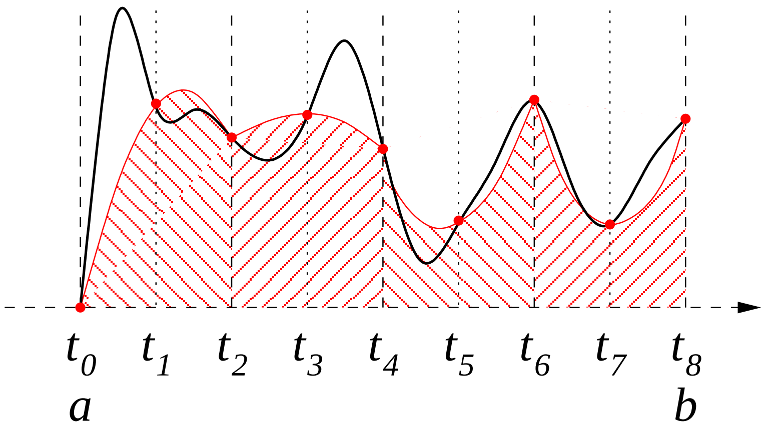
## 3 - Méthode de Simpson (méthode des paraboles)

Pour deux sous-intervalles consécutifs $I_{2k-1} = [t_{2k-2}, t_{2k-1}]$ et $I_{2k} = [t_{2k-1}, t_{2k}]$,
remplacer $y = f(t)$ par la fonction

$$g(t) = \alpha\,t^2 + \beta\,t + \gamma$$

qui interpole les données $(t_{2k-2}, f(t_{2k-2}))$, $(t_{2k-1}, f(t_{2k-1}))$ et $(t_{2k}, f(t_{2k}))$.

$$A = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \simeq \overline{A} = \sum_{k=1}^{n/2} h\left(\frac{f(t_{2k-2}) + 4f(t_{2k-1}) + f(t_{2k})}{3}\right)$$




Exemple avec $n = 8$ sous-intervalles

**Exercice 4 :**

Calculer $\overline{A}$ pour $f(t) = t^2$, $I = [a, b] = [-4, 8]$ et $n = 6$.