Intégration numérique

Séance pratique (2 × 1h30) à faire par binôme.

Dans ce TP, vous allez programmer en Scilab les méthodes vues en cours-TD, puis utilisez ces scripts pour comparer les méthodes entre elles.
Pour se faire, on va choisir des fonctions $y = f(t)$ pour lesquelles on sait calculer $A = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, puis pour évaluer une méthode, on calculera l'intégrale approchée $\overline{A}$ puis l'erreur $e = |A - \overline{A}|$, plus l'erreur e sera proche de 0, meilleure sera la méthode.

Le compte-rendu (à faire par binôme) consiste à compléter le document joint (page 3) au fur et à mesure du TP, et à le rendre à la fin de la deuxième séance.

1 - Calcul d'une somme

Dans les différentes méthodes, le calcul de l'aire (approchée) $\overline{A}$ se fait à l'aide d'une somme. Il faut donc dans un premier temps savoir comment calculer avec Scilab une somme du type $\overline{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{A}_k$.
Ecrivez un fichier-script Scilab nommé `calcul_somme.sce` pour calculer et écrire la somme $\overline{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g(k)$ avec $g(k) = k^3$.
Testez votre script avec différentes valeurs de n entre 1 et 200 et vérifiez que

$$\overline{A} = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2 - Méthode des rectangles

1. Calculez $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t$
2. Ecrivez un fichier-script Scilab nommé `methode_rectangles.sce` afin de :
   — définir la fonction $f(t) = \sin(t)$, l'intervalle $[a, b] = [0, \pi/2]$ et la valeur A,
   — demander à l'utilisateur d'entrer au clavier un entier n pair et strictement positif,
   — calculer $\overline{A}_1$ la valeur approchée de A par la méthode des rectangles (valeur à gauche), puis afficher à l'écran les valeurs de $\overline{A}_1$ et $e_1 = |A - \overline{A}_1|$,
   — calculer $\overline{A}_2$ la valeur approchée de A par la méthode des rectangles (valeur à droite), puis afficher à l'écran les valeurs de $\overline{A}_2$ et $e_2 = |A - \overline{A}_2|$,
   — calculer $\overline{A}_3$ la valeur approchée de A par la méthode des rectangles (valeur au milieu), puis afficher à l'écran les valeurs de $\overline{A}_3$ et $e_3 = |A - \overline{A}_3|$.
   Note : pour afficher la valeur d'une erreur $e = |A - \overline{A}|$, utiliser `mprintf("%10.3e\n", e)`
3. Utilisez votre script afin de commencer à remplir le tableau 1 du compte-rendu.
4. Modifiez votre script afin de calculer l'intégrale de $f(t) = \mathrm{e}^t$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et remplir la première partie du tableau 2.

3 - Méthode des trapèzes

1. En s'inspirant du fichier-script de la méthode précédente, écrivez un fichier-script Scilab nommé `methode_trapezes.sce` afin de :
   — définir la fonction $f(t) = \sin(t)$, l'intervalle $[a, b] = [0, \pi/2]$ et la valeur A,
   — demander à l'utilisateur d'entrer au clavier un entier n pair et strictement positif,
   — calculer $\overline{A}_4$ la valeur approchée de A par la méthode des trapèzes (valeur à gauche), puis afficher à l'écran les valeurs de $\overline{A}_4$ et $e_4 = |A - \overline{A}_4|$,
2. Utilisez votre script afin de continuer à remplir le tableau 1 du compte-rendu.
3. Modifiez votre script afin de calculer l'intégrale de $f(t) = \mathrm{e}^t$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et remplir la deuxième partie du tableau 2.

4 - Méthode de Simpson

1. En s'inspirant des fichiers-scripts des méthodes précédentes, écrivez un fichier-script Scilab nommé `methode_simpson.sce` afin de :
   — définir la fonction $f(t) = \sin(t)$, l'intervalle $[a, b] = [0, \pi/2]$ et la valeur A,
   — demander à l'utilisateur d'entrer au clavier un entier n pair et strictement positif,
   — calculer $\overline{A}_5$ la valeur approchée de A par la méthode de Simpson, puis afficher à l'écran les valeurs de $\overline{A}_5$ et $e_5 = |A - \overline{A}_5|$,
2. Utilisez votre script afin de terminer à remplir le tableau 1 du compte-rendu.
3. Modifiez votre script afin de calculer l'intégrale de $f(t) = \mathrm{e}^t$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et remplir la troisième partie du tableau 2.

5 - Comparatif des méthodes

Remplissez les cadres *(A)* et *(B)* du compte-rendu en répondant aux questions.

Compte-rendu A faire par binôme. Remplir cette fiche et la rendre à la fin du TP.

Noms du binôme

Tableau 1 - Calcul approché de $A = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\, \mathrm{d}t =$

n	10	100	1000	10000
$\overline{A}_1$				
e_1				
$\overline{A}_2$				
e_2				
$\overline{A}_3$				
e_3				
$\overline{A}_4$				
e_4				
$\overline{A}_5$				
e_5				

Tableau 2 - Calcul approché de $A = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t =$

n	10	100	1000	10000
$\overline{A}_3$				
e_3				
$\overline{A}_4$				
e_4				
$\overline{A}_5$				
e_5				

Commentaires sur les résultats :

(A) Pour une méthode donnée, qu'observez-vous pour l'erreur $e = |A - \overline{A}|$ lorsqu'on augmente la valeur de n ?

(B) Comparez les trois méthodes (rectangles / trapèzes / Simpson) en comparant les erreurs respectives $e = |A - \overline{A}|$ pour une même valeur de n.
Classez les trois méthodes de moins bonne à la meilleure.