Equations différentielles

Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants.

On veut résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants donnée par

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{E}$$

▷ *Etape 1.* Résolution de l'équation homogène.
On considère l'équation homogène associée à (E) donnée par

$$z'(x) + a(x)z(x) = 0 \tag{E_0}$$

Et on cherche la fonction z solution de (E_0).
Soit A une primitive de a. On multiplie (E_0) par $e^{A(x)}$:

$$z'(x)e^{A(x)} + z(x)a(x)e^{A(x)} = 0$$

Le membre de gauche est de la forme $z'v + zv'$, avec $v(x) = e^{A(x)}$ et $v'(x) = A'(x)e^{A(x)} = a(x)e^{A(x)}$.
Alors

$$\begin{aligned}
&z'(x)e^{A(x)} + z(x)a(x)e^{A(x)} = 0\\
\Rightarrow &\left(z(x)e^{A(x)}\right)' = 0\\
\Rightarrow &z(x)e^{A(x)} = k \in \mathbb{R}\\
\Rightarrow &z(x) = ke^{-A(x)} \qquad \forall k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $z(x) = ke^{-A(x)}$ est une solution de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

▷ *Etape 2.* Solution particulière de (E) par la méthode de la variation de la constante.
On considère maintenant que $k = k(x)$. Et soit $y_P(x) = k(x)e^{-A(x)}$. Alors

$$\begin{aligned}
y_P'(x) &= k'(x)e^{-A(x)} + (-A'(x)k(x)e^{-A(x)}\\
&= k'(x)e^{-A(x)} - a(x)k(x)e^{-A(x)}
\end{aligned}$$

En remplaçant y_P et y_P' dans (E), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left(k'(x)e^{-A(x)} \cancel{- a(x)k(x)e^{-A(x)}}\right) + \cancel{a(x)k(x)e^{-A(x)}} = b(x)\\
\Rightarrow\quad &k'(x)e^{-A(x)} = b(x)\\
\Rightarrow\quad &k'(x) = b(x)e^{A(x)}
\end{aligned}$$

On détermine la fonction k en calculant une primitive H de la fonction $b(x)e^{A(x)}$. Alors

$$y_P(x) = H(x)e^{-A(x)}$$

▷ *Etape 3.* Solution générale de (E).
La solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants (E) est donnée par

$$\boxed{y(x) = z(x) + y_P(x)}$$

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

On veut résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants donnée par

$$y''(x) + \lambda y'(x) + \mu y(x) = f(x) \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{E}$$

▷ *Etape 1.* Résolution de l'équation homogène.
On considère l'équation homogène associée à (E) donnée par

$$z''(x) + \lambda z'(x) + \mu z(x) = 0 \tag{E_0}$$

Et on cherche z solution de (E_0). Pour cela, on cherche les racines du polynôme caractéristique associé à (E_0), autrement dit on résoud

$$T(r) = r^2 + \lambda r + \mu = 0 \tag{1}$$

On calcule le discriminant Δ de T, et selon le signe de Δ on a :

$\Delta > 0$	T admet 2 racines réelles simples r_1 et r_2	$z(x) = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	T admet 1 racine réelle double r_0	$z(x) = (K_1 x + K_2) e^{r_0 x}$
$\Delta < 0$	T n'admet aucune racine réelle	$z(x) = e^{-\frac{\lambda}{2}x} \left[K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x \right) + K_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x \right) \right]$

pour tout $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

▷ *Etape 2.* Solution particulière de (E).
On cherche une solution particulière y_P de (E). Selon la forme du second membre $f(x)$:

1) $f(x) = P(x)$ avec P polynôme de degré n	$y_P(x) = x^p Q(x)$, avec Q polynôme de degré n et $p = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \text{ n'est pas une racine de } T \\ 1 & \text{si } 0 \text{ est une racine simple de } T \\ 2 & \text{si } 0 \text{ est une racine double de } T \end{cases}$
2) $f(x) = e^{mx} P(x)$ avec P polynôme de degré n	$y_P(x) = x^p e^{mx} Q(x)$, avec Q polynôme de degré n et $p = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ n'est pas une racine de } T \\ 1 & \text{si } m \text{ est une racine simple de } T \\ 2 & \text{si } m \text{ est une racine double de } T \end{cases}$
3) $f(x) = e^{mx} \left(P_1(x) \cos(\omega x) + P_2(x) \sin(\omega x) \right)$ avec P_1, P_2 polynômes de degrés n	$y_P(x) = x^p e^{mx} \left(Q_1(x) \cos(\omega x) + Q_2(x) \sin(\omega x) \right)$, avec Q_1, Q_2 polynômes de degré n et $p = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ n'est pas une racine de } T \\ 1 & \text{si } m \text{ est une racine simple de } T \\ 2 & \text{si } m \text{ est une racine double de } T \end{cases}$
4) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ avec f_1 et f_2 vérifiant 1) ou 2)	On cherche : • y_1 sol. part. de $y_1'' + ay_1' + by_1 = f_1(x)$ avec 1), 2) ou 3) ; • y_2 sol. part. de $y_2'' + ay_2' + by_2 = f_2(x)$ avec 1), 2) ou 3) ; Finalement, $y_P(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

On calcule y_P' et y_P'', on remplace dans (E) et on identifie les coefficients de Q.

▷ *Etape 3.* Solution générale de (E).
La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E) est donnée par

$$\boxed{y(x) = z(x) + y_P(x)}$$

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

On veut résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants donnée par

$$y''(x) + \lambda y'(x) + \mu y(x) = f(x) \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{E}$$

▷ *Etape 1.* Résolution de l'équation homogène.
On considère l'équation homogène associée à (E) donnée par

$$z''(x) + \lambda z'(x) + \mu z(x) = 0 \tag{E_0}$$

Et on cherche z solution de (E_0). Pour cela, on cherche les racines du polynôme caractéristique associé à (E_0), autrement dit on résoud

$$T(r) = r^2 + \lambda r + \mu = 0 \tag{2}$$

On calcule le discriminant Δ de T, et selon le signe de Δ on a :

$\Delta > 0$	T admet 2 racines réelles simples r_1 et r_2	$z(x) = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	T admet 1 racine réelle double r_0	$z(x) = (K_1 x + K_2) e^{r_0 x}$
$\Delta < 0$	T n'admet aucune racine réelle	$z(x) = e^{-\frac{\lambda}{2} x} \left[K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x \right) + K_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x \right) \right]$

pour tout $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

▷ *Etape 2.* Solution particulière de (E) par la méthode de la variation de la constante.
On considère maintenant que $K_1 = K_1(x)$ et $K_2 = K_2(x)$. On pose

$$\begin{aligned} y_1(x) &= z(x) \quad \text{pour } K_1 = 1, K_2 = 0 \\ y_2(x) &= z(x) \quad \text{pour } K_1 = 0, K_2 = 1 \end{aligned}$$

On cherche alors une solution particulière $y_P(x) = K_1(x) y_1(x) + K_2(x) y_2(x)$. Pour cela, on résoud le système suivant pour trouver $K_1(x)$ et $K_2(x)$:

$$\begin{cases} K_1'(x) y_1(x) + K_2'(x) y_2(x) = 0 \\ K_1'(x) y_1'(x) + K_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

On trouve K_1' et K_2', et finalement K_1 et K_2 par intégration.

▷ *Etape 3.* Solution générale de (E).
La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E) est donnée par

$$\boxed{y(x) = z(x) + y_P(x)}$$