UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

2015-2016

MATH 121-b – Correction CC1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1 - x^3 + \sqrt{x^2+2x-3}}{x^2 - |x-2|}$.

Question 1. Domaine de définition de f :

On cherche les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 - |x-2| \neq 0$ et $x^2 + 2x - 3 \geq 0$. On a :

- $x^2 - |x-2| \neq 0$
  On commence par lever la valeur absolue :
  $$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$
  Ainsi,
  $$x^2 - |x-2| = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$
  Calculons les racines de $P(x) = x^2 - x + 2$:
  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 < 0 \ \longrightarrow$ pas de racine réelle.

  Calculons les racines de $Q(x) = x^2 + x - 2$:
  $\Delta = (-1)^2 + 4 \times 2 = 9 > 0 \ \longrightarrow$ 2 racines réelles simples, $x_1^Q = -2$ et $x_2^Q = 1$.

  Donc $x^2 - |x-2| \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$.

- $x^2 + 2x - 3 \geq 0$
  On calcule le discriminant du polynôme $R(x) = x^2 + 2x - 3$:
  $\Delta = 2^2 + 4 \times 3 = 16 > 0 \ \longrightarrow$ 2 racines réelles simples, $x_1^R = -3$ et $x_2^R = 1$.

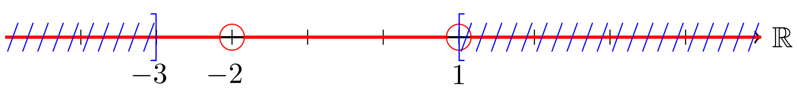
  On en déduit donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Donc $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.

Finalement, le domaine de définition de f est l'ensemble

$$D = (\mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}) \cap (]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[).$$



Ainsi, $\boxed{D =]-\infty, -3] \cup]1, +\infty[}$.

Question 2. Dérivabilité de f sur D :

La fonction f est globalement dérivable partout sur D (en tant que quotient de fonctions dérivables) sauf peut-être aux bords de l'intervalle, c'est-à-dire ici en $x = -3$. Etudions donc la dérivabilité de f en $x = -3$:

Pour cela, on doit normalement calculer les deux limites suivantes :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$$

et

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$$

et on vérifie qu'elles sont finies et égales.

Dans notre cas (il s'agit d'un QCM sans justification demandée), on peut simplement supposer que la fonction f est dérivable sur D tout entier, calculer la dérivée f' et étudier le domaine de définition D' de f' ; si $D' = D$ alors f est dérivable sur D, sinon, f n'est pas dérivable sur D.

On rappelle que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^3 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x^2 - x + 2} & \text{si } x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{1 - x^3 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x^2 + x - 2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Dans les deux cas, f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec
$u(x) = 1 - x^3 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$
et
$$v(x) = x^2 - |x - 2| = \begin{cases} v^+(x) = x^2 - x + 2 & \text{si } x \geq 2 \\[1ex] v^-(x) = x^2 + x - 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$
On a :
$$u'(x) = 1 - 3x^2 + \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \frac{(1 - 3x^2)\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$
et
$$v'(x) = \begin{cases} v'^+(x) = 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \\[1ex] v'^-(x) = 2x + 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$
Donc finalement
$$f'(x) = \frac{[(1 - 3x^2)\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x + 1][x^2 - |x - 2|] - [1 - x^3 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}][2x \pm 1]}{(x^2 - |x - 2|)^2\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$
Ainsi, f' est définie pour les $x \in D$ tels que $x^2 - |x - 2| \neq 0$ et $x^2 + 2x - 3 > 0$. Or on a vu à la question 1 que

- $x^2 - |x - 2| = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1\}$
- $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, 1\}$

Ainsi, f' est définie sur $D' = D \backslash \{-3\} \neq D$. Donc $\boxed{\text{f n'est pas dérivable sur D}}$.

Question 3. Limite de f en 2 :

La fonction f étant continue en $x = 2$,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{1 - 2^3 + \sqrt{2^2 + 2 \times 2 - 3}}{(2)^2 - 2 + 2} = \boxed{\frac{\sqrt{5} - 7}{4}}$$

Question 4. Soit $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+2}$. Dérivée de g :

La fonction g est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = x^2+x+1$ et $v(x) = x+2$.

On a $u'(x) = 2x+1$ et $v'(x) = 1$.

Donc $g'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+2)-(x^2+x+1)\times 1}{(x+2)^2} = \boxed{\dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}}$.

Question 5. Soit $x \in]1,2]$. Relation entre f et g :

Comme $x \in]1,2]$, $x < 2$ donc $f(x) = \dfrac{1-x^3+\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2+x-2}$. Factorisons f :

- On remarque que 1 est racine évidente de $1-x^3$, donc on peut factoriser $1-x^3$ par $(x-1)$. En effectuant la division euclidienne de $1-x^3$ par $(x-1)$, on trouve que $1-x^3 = -(x-1)(x^2+x+1)$. Le discriminant de x^2+x+1 étant négatif, on ne peut pas factoriser plus $1-x^3$.
- D'après la question 1, -3 et 1 sont racines de x^2+2x-3, donc $x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$.
- D'après la question 1, -2 et 1 sont racines de x^2+x-2, donc $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

On a donc
$$f(x) = \frac{-(x-1)(x^2+x+1)+\sqrt{(x+3)(x-1)}}{(x+2)(x-1)} = \frac{-\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{(x+2)\cancel{(x-1)}} + \frac{\sqrt{(x+3)}\cancel{\sqrt{(x-1)}}}{(x+2)\sqrt{x-1}\cancel{\sqrt{x-1}}}$$

Donc $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x+2}\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}} - g(x)}$.

Question 6. Variations de f sur $]1,2]$:

On avait déjà calculé la dérivée de f à la question 2, mais elle était un peu compliquée à travailler... Exploitons donc le résultat de la question 5 :

$$f(x) = \frac{1}{x+2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} - g(x)$$
ie : $f(x) = \left(\dfrac{1}{x+2}\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}\right)' - g'(x)$

On connaît g' d'après la question 4, il nous reste donc à calculer la dérivée du premier terme, qui est de la forme uv avec
$$u(x) = \frac{1}{\tilde{u}(x)} = \frac{1}{x+2} \text{ et } v(x) = \sqrt{\frac{v_1(x)}{v_2(x)}} = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$$
Alors
$$u'(x) = -\frac{\tilde{u}'(x)}{[\tilde{u}(x)]^2} = -\frac{1}{(x+2)^2}$$
et
$$v'(x) = \frac{\dfrac{v_1'(x)v_2(x)-v_1(x)v_2'(x)}{[v_2(x)]^2}}{2\sqrt{\dfrac{v_1(x)}{v_2(x)}}} = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}}\frac{(x-1)-(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}}$$
Ainsi,
$$\left(\frac{1}{x+2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}\right)' = -\frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} + \frac{1}{x+2}\frac{-4}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}}$$

Donc finalement,
$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} - \frac{1}{x+2}\frac{4}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}} - \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$
$$= -\left[\underbrace{\frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{>0 \text{ sur }]1,2]} + \underbrace{\frac{4}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}}_{>0 \text{ (discriminant du num négatif)}}\right]$$
La dérivée f' est strictement négative sur $]1,2]$, donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]1,2]}$.

Question 7. Limite de f en 1^+ :

Quand $x \to 1^+$, $x < 2$ donc $f(x) = \dfrac{1-x^3+\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2+x-2}$.

De plus, on pose $t = x-1 \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0^+$ afin de se ramener à une limite en 0. On a :
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x^3+\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2+x-2} = \text{FI}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1-(t+1)^3+\sqrt{(t+1)^2+2(t+1)-3}}{(t+1)^2+(t+1)-2}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1-t^3-3t^2-3t-1+\sqrt{t^2+4t}}{t^2+3t}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}[-t^{5/2}-3t^{3/2}-3t^{1/2}+\sqrt{t+4}}{t(t+3)}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{2}{3} = +\infty$$
Donc $\boxed{\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x^3+\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2+x-2} = +\infty}$.

Question 8. Nombre de solutions de $f(x) = 0$ sur $]1,2]$:

On sait que :

- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x^3+\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-|x-2|}(x) = +\infty$ (question 7), donc par définition de la limite infinie on a :
$$\forall M > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in]1, 1+\varepsilon], f(x) \geq M > 0$$
En particulier, $f(1+\varepsilon) \geq M > 0$.
- $f(2) = \dfrac{\sqrt{5}-7}{4}$ d'après la question 3 ; mais $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$ donc $\sqrt{5} < 7$ ce qui implique que $f(2) < 0$.
- f est continue sur $]1,2]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un $\alpha \in]1,2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Mais d'après la question 6, f est strictement décroissante sur $]1,2]$, donc
$\boxed{f \text{ ne s'annule qu'une seule fois sur }]1,2]}$.

x	1		α		2
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{\sqrt{5}-7}{4}$

Question 9. Limite de f en $+\infty$:

Quand $x \to +\infty$, $x \leq 2$ donc $f(x) = \dfrac{1-x^3+\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-x+2}$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3+\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-x+2} = \text{FI}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left[\frac{1}{x^3}-1+\frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right]}{x^2\left[1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\frac{-1}{1} = -\infty$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3+\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-x+2} = -\infty}$.

Question 10. Asymptote oblique Δ en $+\infty$:

On suit les étapes pour déterminer si une droite Δ : $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$:

- D'après le calcul de la question 9, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x}\dfrac{-1}{1} = -1 = a$
- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$$
  $$= \lim_{x\to+\infty} f(x) + x$$
  $$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^3+\sqrt{x^2+2x-3}+x(x^2+x-2)}{x^2-x+2}$$
  $$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-1+\frac{2}{x}\right]}{x^2\left[1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]} = -1 = b$$

Donc $\boxed{\Delta : y = -x-1 \text{ est asymptote oblique à } f \text{ en } +\infty}$.

Question 11. Position de f par rapport à Δ :

On doit étudier le signe de la différence $f(x) - (ax+b)$, donc ici le signe de $f(x)+x+1$:

$$f(x)+x+1 = \frac{1-x^3+\sqrt{x^2+2x-3}+(x+1)(x^2+x-2)}{x^2-x+2} = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-x+2} + \frac{x+3}{x^2-x+2}$$

Or à la question 1 on a vu que le dénominateur est de discriminant négatif, donc il est toujours positif. De plus, $\forall x \geq 1$, $\sqrt{x^2+2x-3} \geq 0$ et $x+3 \geq 0$. Donc $f(x)+x+1$ est égal à la somme de deux termes positifs, ce qui veut dire que $f(x)+x+1 \geq 0$, et donc que $\boxed{f \text{ est au-dessus de son asymptote}}$.